NAT 5084

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

123

Exchange.

September 2, 1901 — May 26, 1902.

SEP 2 1901

123

Mittheilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1899.

Nr. 1463-1477.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN.
Druck und Verlag von K. J. Wyss.
1900.

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

BIBLIOGRAPHIE
der
Schweizerischen Landeskunde.

Unter Mitwirkung
der
hohen Bundesbehörden, eidgen. und kant. Amtsstellen
und zahlreicher Gelehrter
herausgegeben von der
Centralkommission für schweizerische Landeskunde.

In deutscher und französischer Ausgabe.

Bis jetzt erschienen :

Fascikel Ia: *Bibliographische Vorarbeiten der landeskundlichen Litteratur und Kataloge der Bibliotheken der Schweiz.* Zusammengestellt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1894. 69 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel I b, enthaltend: *Bibliographie der Gesellschaftsschriften, Zeitungen und Kalender der Schweiz*, von Prof. J. L. Brandstetter in Luzern. 380 Seiten. Preis Fr. 3.—

Fascikel II a: *Landesvermessung und Karten der Schweiz, ihrer Landstriche und Kantone.* Herausgegeben vom eidgen. topographischen Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1892. 193 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II b: *Karten kleinerer Gebiete der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf, Bern 1892. 164 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II c: *Stadt- und Ortschaftspläne, Reliefs und Panoramen der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1893. 173 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II d, enthaltend: *Generalregister, Ergänzungen und Nachträge zu den Fascikeln II a—c* (Landesvermessung, Kataloge der Kartensammlungen, Karten, Reliefs und Panoramen). Im Auftrage des eidgen. topograph. Büreaus redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. 220 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel III: *Landes- und Reisebeschreibungen.* Ein Beitrag zur Bibliographie der schweizer. Reiselitteratur, 1479—1890. Zusammengestellt von A. Wäber, Bern. 462 Seiten 8°. Preis Fr. 4.—

Fascikel IV b: *Die Fauna der italienischen Schweiz.* Redigirt von Prof. Dr. A. Lenticchia. Como 1894. 19 Seiten 8°. Preis 50 Cts.

Fascikel IV 3: *Balneologie und Climatotherapie.* Versuch einer schweiz. Bibliographie der Litteratur auf den Gebieten des Badewesens, der Heilquellen, der climaterischen Kurorte u. s. w. Von B. Reber in Genf. 130 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica*: Heft 2: Seenfauna. Zusammengestellt von Prof. D. F. Zschokke. Bern 1897. 30 Seiten. 60 Cts.

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 4: Vögel. Zusammengestellt von Prof. Dr. Theophil Studer. Bern 1895. 57 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

(Fortsetzung auf Seite 3 des Umschlags.)

Mittheilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1899.

Nr. 1463-1477.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN.
Druck und Verlag von K. J. Wyss.
1900.

SEP 2 1901

Jahresbericht

über die

Thätigkeit der bernischen Naturforschenden Gesellschaft

im Zeitraum vom 1. Mai 1898 bis 30. April 1899.

Hochgeehrte Herren!

Das hinter uns liegende Vereinsjahr war für unsere Gesellschaft besonders bedeutungsvoll durch die am 1.—3. August des verflossenen Jahres in Bern und Grindelwald abgehaltene Jahresversammlung der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft. Es ist hier nicht der Ort, einen näheren Bericht zu geben über den Verlauf dieses vom herrlichsten Wetter begünstigten Festes und über die zahlreichen wissenschaftlichen Mittheilungen, welche in den allgemeinen und in den Sectionssitzungen vorgelegt worden sind. Nur so viel sei hier bemerkt, dass Dank dem zahlreichen Besuche und den Beiträgen von Seiten der Behörden der finanzielle Abschluss, mit einem Defizit von nur 100 Fr., für unsere Kasse ein relativ günstiger genannt werden kann.

Auch unser Mitgliederbestand erfuhr bei Gelegenheit der Naturforscherversammlung einen Zuwachs: ein Circular, welches im Juli versandt wurde, hatte 17 Neu-Anmeldungen zur Folge. Im Ganzen weist das Jahr 1898/99 20 Aufnahmen und 6 Austritte auf.

Sitzungen wurden im Ganzen 11 abgehalten, worunter zwei Demonstrationsabende. In denselben haben sich folgende Herren durch Vorträge, kleinere Mittheilungen oder Vorweisungen betheiligt: Herr Asher (1), Baltzer (1), v. Fellenberg (4), Ed. Fischer (3), L. Fischer (1), Göldi (2), Graf (1), Gruner (2), v. Jenner (1), Kaufmann (1), v. Kostanecki (2), Moser (1), Schaffer (2), Schücking (1), Sidler (1), Steck (2), Studer-Steinhäuslin (2), Th. Studer (4).

Von diesen Mittheilungen entfallen auf Zoologie 8, auf Botanik 6, auf Mineralogie, Geologie, Palaeontologie 6, auf Chemie und Nahrungsmitteluntersuchung 4, auf Mathematik und Geschichte der Mathematik 2, auf Physiologie 2, auf Physik 2, auf Anthropologie 1, auf Astronomie 1.

Eine auswärtige Sitzung wurde im Hinblick auf die Versammlung der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft im letzten Sommer nicht abgehalten.

Am schweizerischen Aerztetag in Bern, bei dem 25jährigen Jubiläum der bernischen geographischen Gesellschaft, sowie bei der Be-

erdigung des Herrn Professor F. Lang in Solothurn war unsere Gesellschaft durch Delegirte vertreten; zur Einweihung der ersten Theilstrecke der Jungfraubahn wurde ein Gratulationstelegramm abgeschickt.

Ueber den Lesezirkel berichtet der Geschäftsführer, Herr Dr. Th. Steck: Mit dem 1. Mai hat der Lesezirkel die 10 ersten Jahre seines Bestehens überschritten. Da eine Neuauflage des schon seit einiger Zeit vergriffenen Reglementes nothwendig geworden, wurden den Erfahrungen der abgelaufenen Dekade entsprechend eine Anzahl Bestimmungen des ursprünglichen Reglementes abgeändert. Die wichtigste Aenderung betrifft den Wegfall der Bussen für solche, die die Mappen über die vorgesehene Frist hinaus behalten. Theilnehmer, welche sich nach dieser Richtung hin gegen das Reglement verfehlen, können künftig auf Antrag des Geschäftsführers vom Vorstande der Gesellschaft für kürzere oder längere Zeit von der Theilnahme am Lesezirkel ausgeschlossen werden. — Eine Einladung zur Theilnahme am Lesezirkel, die im November mit dem neuen Reglement an alle Mitglieder versandt wurde, hatte die Anmeldung von 18 neuen Theilnehmern zur Folge. Dadurch ist nun die Zahl derselben auf 41 gestiegen. Die Zahl und Auswahl der zirkulirenden Zeitschriften hat sich gegenüber dem letzten Jahre nicht verändert. Dem Geschäftsführer wurde in der Sitzung vom 29. April für die Besorgung des Lesezirkels eine Honorirung von 50 Fr. jährlich zugesprochen.

Wie schon früher, so war auch im verflossenen Jahre unsere Gesellschaft um die Erhaltung von erratischen Blöcken besorgt. Es galt dies insbesondere einigen Blöcken in der Gegend von Nidau und einem solchen am Bintel bei Wimmis. Bei dem letztern wurde Ankauf zu Handen des naturhistorischen Museums beschlossen.

Zum Präsidenten für das Vereinsjahr 1899/1900 wurde Herr Professor St. v. Kostanecki, zum Vicepräsidenten Herr Professor Brückner gewählt.

Der Präsident: **Ed. Fischer.**

Sitzungs-Berichte.

932. Sitzung vom 14. Januar 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Fischer. Anwesend: 24 Mitglieder.

1. Hr. E. Göldi spricht über die **Fischfauna des Amazonenstromes.**
2. Hr. Th. Studer weist einen Abguss von **Archäopteryx** vor.
3. Hr. Ed. v. Fellenberg berichtet über den sog. **fossilen Baumstamm**, der a. 1887 bei Guttannen in einem Gneissblock gefunden wurde und sich bei genauerer Untersuchung als eine Einlagerung von Hornblende erwiesen hat.

933. Sitzung vom 28. Januar 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Fischer: Anwesend: 33 Mitglieder.

1. Hr. P. Gruner spricht über **Beugungserscheinungen** und deren Beziehungen zu den Dämmerungsfarben und zu dem Alpenglühen.
2. Hr. Dr. Schücking aus Pyrmont, eingeführt durch Herrn Kronecker, macht eine Mittheilung über: **die belebende Wirkung des Natriumsaccharates auf das Herz.**

Er setzte auseinander, wie dieses bisher noch wenig bekannte Präparat, dessen physiologische und pharmakologische Wirkungen noch nicht untersucht worden, in sehr kleiner Menge (0,05 proc.) der physiologischen Kochsalzlösung (0,75 proc.) zugesetzt, das hiervon durchspülte Herz kräftig mache und tagelang erhalte.

Chlorcalcium und Chlorkalium, welche Ringer als Zusätze zur Cl Natriumlösung empfahl, haben viel weniger günstige Wirkung als die Natriumsaccharatlösung. Chlorkalium ist zumal schwachen Herzen schädlich. Ebenso ist Howells neuerdings empfohlene Modifikation der Ringer'schen Lösung minderwertig als die Sacharatlösung. Allerdings erhöht ein ganz geringer Zusatz von Chlorcalcium (0,03 proc.) zur Sacharatlösung deren Wirkung. Das durchspülte Froschherz wird nur ausserordentlich langsam vollkommen vom Blut befreit. Man findet nach stundenlanger Perfusion noch Blutspuren in der Spülflüssigkeit.

934. Sitzung vom 11. Februar 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Fischer. Anwesend: 18 Mitglieder.

1. Hr. L. Asher spricht über die **Quelle der Muskelkraft.**

935. Sitzung vom 25. Februar 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Fischer. Anwesend: 12 Mitglieder.

1. Hr. A. Baltzer demonstrirt die Reproduktion zweier Reliefs von altgriechischen Bechern herrührend. Das eine Relief zeigt die Jagd auf **Bos primigenius**, das andere zeigt das gleiche Thier in gezähmtem Zustande.
2. Hr. Th. Studer weist einen reconstruirten **Pfahlbauer-Frauenkopf** von Prof. Kollmann in Basel vor.
3. Hr. St. v. Kostanecki weist galizisches **Erdwachs**, Cerisin und galizisches Erdöl vor.
4. Herr Ed. Fischer legt die kürzlich erschienene Arbeit von Prof. H. Bachmann über die **Prothallien von Lycopodium** vor und weist die Prothallien von Lycopodium clavatum und annotinum vor, welche das botanische Institut der Güte von Herrn Prof. Bruchmann verdankt.

936. Sitzung vom 11. März 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Fischer. Anwesend: 25 Mitglieder.

1. Hr. Th. Studer weist ein **neues Beutelthier**, Notoryctes, vor.
2. Hr. A. Baltzer macht einige **geologische Mittheilungen**.
3. Herr Ed. Fischer gibt ein kurzes Résumé der heutigen Kenntnisse über die **fossilen Cycadeen** und bespricht etwas eingehender die Organisation der Bennettiteen unter Zugrundelegung der bezüglichen Untersuchungen von Solms-Laubach. Ausser lebenden Exemplaren und Blüthen heutiger Cycadeen weist der Vortragende einen Stamm von Bennettites Dakotensis aus dem nordamerikanischen Jura und Blätter von Zamia und Otozamites von Rovere di Velo (Vicenza) vor.

937. Sitzung vom 29. April 1899.

Abends 8 Uhr im Hörsaal des Kantonschemikers.

Vorsitzender: Hr. Ed. Fischer. Anwesend: 18 Mitglieder.

1. Wahlen. Es werden gewählt für das Vereinsjahr 1899/1900:
   Zum Präsidenten: Hr. Prof. Dr. St. v. Kostanecki.
   Zum Vice-Präsidenten: Hr. Prof. Dr. Ed. Brückner.
2. Hr. Schaffer spricht über **Butter-Untersuchungen**, mit Demonstrationen.

938. Sitzung vom 13. Mai 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 25 Mitglieder.

1. Der abtretende Präsident, Hr. Ed. Fischer, verliest den **Jahresbericht** pro 1. Mai 1898 bis 1. Mai 1899.
2. Hr. Th. Studer spricht über **Säugethier-Reste aus dem Wadi Natron in Unter-Aegypten**, mit Vorweisungen.
3. Hr. E. Göldi spricht über **Schmetterlingszüge im Amazonengebiet.**

Referent erinnert, dass zuweilen auffällige Schmetterlingszüge, vornehmlich durch Weisslinge gebildet, auch in der Schweiz beobachtet werden. In grossartigem Massstabe werden derartige Schmetterlings-

züge im Amazonas-Gebiet gesehen, wo sie den Anwohnern seit alten Zeiten unter dem indianischen Namen **„paná-paná“** wohlbekannt sind. Es wird ein kurzer Ueberblick über bezügliche Schilderungen von früheren Reisenden, Schomburgk, Bates, Wallace und Spence gegeben und eine summarische Kritik derselben geboten. Referent tritt hierauf auf seine eigenen Beobachtungen ein, die gelegentlich der Expedition nach dem Oberlauf des Rio Capión im Staate Pará (Juni—Juli 1897) gemacht wurden und an denen sich ein Zoologe und ein Botaniker speziell betheiligten. Es ergab sich 1. dass die Schmetterlinge in den Morgenstunden bis Mittag am rechten Ufer stromaufwärts flogen und Süd-Richtung innehielten, während in den Nachmittagstunden die Rückkehr am linken Ufer mit nördlichem Kurs erfolgte. (Im Gegensatz zu den Behauptungen von Bates und Spence, die den Zügen stets südliche Richtung zuschreiben.) 2. Dass die Züge in jener Gegend aus Weisslingen (Picriden) zusammengesetzt sind, Vettern unseres Citronenfalters, in der Weise, dass vielleicht 95 Prozent durch die weissliche *Catopsilia statira*, der Rest durch die hellgelben Cat. Trite und Cat. Eubule, mit geringer Betheiligung der grell orangefarbenen Cat. Argante, geliefert werden. 3. Dass diese Weisslinge offenbar in ihren Wanderungen durch gewisse Bäume beeinflusst werden, die zu jener Zeit blühen, zumal durch den zu den Leguminosæ-Caesalpinoideae gehörigen «Arapary»-Baum (*Vonapa acaciæfolio* [Benth] Brillon = Macrolobium acaciaefolium Benth).

An der Hand von nach Photographien gefertigten Zeichnungen wird sowohl das Physiognomische dieser imposanten Picriden-Züge, als auch die auf Insekten-Besuch berechnete Blüten-Stellung und -Einrichtung des Arapary-Baumes erläutert.

4. Hr. Th. Studer macht einige Bemerkungen über den **Ur-Stier**, in Beziehung zu Jesaia 51, 25.

939. Sitzung vom 27. Mai 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki: Anwesend 14 Mitglieder.

1. Als Delegirte an die Versammlung der schweizer. naturforschenden Gesellschaft in **Neuenburg** werden die HH. Prof. Fischer und Prof. Graf bezeichnet.
2. Hr. E. Göldi spricht über die **Fischfauna des Amazonenstromes** 2. Theil
3. Hr. Kaufmann demonstrirt eine **Tænia** aus dem Darmkanal einer Forelle.

940. Sitzung vom 25. Juni 1899.

Morgens 11 Uhr, im Freien Hof, in **Thun.**

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend 40—50 Personen.

1. Hr. A. Benteli spricht über **die Niveauschwankungen der schweizerischen See'n**, mit besonderer Berücksichtigung der Jura-See'n.
2. Herr R. Huber spricht über **Das Wesen der Telegraphie ohne Draht.**

Einleitend wird eine kurze Uebersicht über die bisher angewendeten Methoden gegeben, welche dazu dienten mittelst Elektricität ohne Benützung von Leitungsdrähten zwischen zwei entfernten Orten sich zu

verständigen. Hierauf besprach der Vortragende die Untersuchungen von Faraday und Maxwell, welche zur Begründung der elektromagnetischen Lichttheorie führten; machte aufmerksam auf die Beziehung zwischen der Dielektricitätskonstanten und optischen Brechungsexponenten, etc., und auf die Rolle des Dielektikums.

Im Ferneren wurden die Versuche von Hertz besprochen, und die hauptsächlichsten Methoden angegeben, welche seither dazu dienten, um Oscillator und Cohärer zu vervollkommnen.

Nach einer Würdigung der Verdienste Marconi's wurde dessen Art zu telegraphieren in übersichtlicher Weise erläutert, und zum Schluss gab der Referent noch eine kurze Erklärung der «Lichtelektrischen Telegraphie» von Zickler.

3. Am Nachmittag wird die kantonale Gewerbe- und Industrie-Ausstellung besichtigt.

941. Sitzung vom 4. November 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 30 Mitglieder.

1. Hr. A. Tschirch spricht über **natürliche Auswahl von Arzneimitteln ähnlicher Wirkungsweise** seitens der Bewohner räumlich weit getrennter Länder.
2. Hr. A. Baltzer weist **geologische Photographieen** vor.
3. Hr. Th. Studer legt eine Dissertation von Herrn Dr. Schürch über die in den schweizerischen Beinhäusern aufbewahrten **Schädel** vor.

942. Sitzung vom 25. November 1899.

Abends 8 Uhr im Hallerianum.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 15 Mitglieder.

1. Hr. H. Kronecker spricht über **Messung von Flüssigkeitsdruck-Schwankungen**, mit Demonstrationen.

943. Sitzung vom 9. Dezember 1899.

Abends 8 Uhr im geologischen Institut.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 20 Mitglieder.

1. Hr. A. Baltzer spricht über **neuere Eruptionen des Aetna**, mit Demonstrationen und Projektionen.
2. Hr. A. Tschirch weist ein „**ideales Bild einer Kohlenlandschaft**“ von Potonié vor.

Verzeichniss der Mitglieder

der

Bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

(Am 31. Dezember 1899.)

Die mit * bezeichneten Mitglieder wurden im Jahre 1899 neu aufgenommen.

Vorstand.

Prof. Dr. *St. von Kostanecki,* Präsident.
Prof. Dr. *Ed. Brückner,* Vice-Präsident.
B. Studer, jun., Apotheker, Kassier seit 1875.
Prof. Dr. *J. H. Graf*, Redaktor der Mittheilungen seit 1883.
Dr. *Th. Steck,* Oberbibliothekar und Geschäftsführer des Lesezirkels.
Dr. *P. Gruner,* Sekretär seit 1898.

Mitglieder.

1.	*Allemann,* J., Arzt, Zweisimmen	1898
2.	*Anderegg*, Ernst, Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern	1891
3.	*Andreae,* Philipp, Apotheker, Bern	1883
4.	*Badertscher,* Dr. A., Sekundarlehrer, Bern	1888
5.	*Balmer,* Dr. Hans, Bern	1886
6.	*Baltzer,* Dr. A., Professor der Mineralogie und Geologie, Bern	1884
7.	*Beck,* Dr. Gottl., Lehrer des Freien Gymnasiums, Bern	1876
8.	*v. Benoit,* Dr. jur. G., Bern	1872
9.	*Benteli,* A., Rektor und Dozent, Bern	1869
10.	*Benteli,* A., V. D. M., Bern	1891
11.	*Berdez,* H., Professor an der Thierarzneischule, Bern	1879
12.	*Brückner,* Dr. Ed., Prof. der Geographie, Bern	1888
13.	*Brunner*, C., Dr. phil., Hofrath, Trautsohngasse 6, Wien	1846
14.	*Büchi,* Fr., Optiker, Bern	1874
15.	*Burri,* Dr. phil., Prosektor	1895
16.	*v. Büren,* Eug., allié von Salis, Sachwalter, Bern	1877
17.	*Cherbuliez,* Dr., Direktor, Strassburg	1861
18.	*Coaz,* eidgenössischer Oberforstinspektor, Bern	1875
19.	*Conrad,* Dr. Fr., Arzt in Bern	1872
20.	*Crelier*, Dr., Lehrer am Technikum Biel	1896
21.	*Dick,* Dr. Rud., Arzt in Bern	1876
22.	*Droz,* Arnold, Kantonsschullehrer in Pruntrut	1890

23. *Dubois*, Dr. med., Arzt, Privatdocent, Bern . . . 1884
24. *Dumont*, Dr. med. F., Arzt, Privatdocent, Bern . . 1890
25. *Dutoit*, Dr. med., Arzt in Bern 1867
26. *Eggenberger*, J., Dr. phil., Versicherungsbeamter, München . 1892
27. *Egues*, Jules, Dr. med., Corgémont 1898
28. *Engelmann*, Dr., Apotheker in Basel 1874
29. **Farner*, Dr. A., Apotheker 1899
30. *v. Fellenberg*, Dr. phil. E., Bergingenieur, Bern . . . 1861
31. *Fischer*, Dr. phil. Ed., Professor der Botanik, Bern . . 1885
32. *Fischer*, Dr. L., Honorar-Professor, Bern 1852
33. *Flach*, Arthur, Dr. med., Bern 1898
34. *v. Freudenreich*, Dr. E., Bern 1885
35. *Friedheim*, Dr. Prof., Bern 1897
36. *Geering*, Ernst, Dr. med., Reconvillier 1898
37. *de Giacomi*, J., Dr. med., Arzt und Privatdocent, Bern . 1889
38. *Girard*, Prof. Dr. med., Arzt in Bern 1876
39. *Gosset*, Philipp, Ingenieur, Wabern bei Bern . . . 1865
40. *Graf*, Dr. J. H., Professor der Mathematik, Bern . . 1874
41. *Gressly*, Alb., Oberst, Maschinen-Ingenieur, Bern . . 1872
42. *Grimm*, J., Präparator, Bern 1876
43. *Gruner*, Dr. Paul, Gymnasiallehrer und Docent, Bern . 1892
44. *Guillebeau*, Professor Dr., Bern 1878
45. *Haaf*, C., Droguist, Bern 1857
46. *Haas*, Dr. med., Sigismund, Arzt in Muri bei Bern . . 1890
47. *Hartmann*, Dr. phil., Mathemat. a. Eisenbahndepartement, Bern 1898
48. *Hasler*, Dr. phil. G., Dir. d. Telegraphen-Werkstätte, Bern 1861
49. **Heffter*, Dr. A. W. A., Prof. der med. Chemie u. Pharmacologie 1899
50. *Held*, Leon, Ingenieur, Bern 1879
51. *Huber*, Dr. G., Professor der Mathematik, Bern . . . 1888
52. *Huber*, Rud., Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . . 1891
53. *Hug*, Otto, Dr. phil., Bern 1897
54. *Humbel*, Rudolf, Thierarzt, Nieder-Bipp 1898
55. *Jadassohn*, Dr. Prof., Bern 1897
56. *Jenner*, E., Entomolog, hist. Museum, Bern . . . 1870
57. *Jonquière*, Dr. med. Georg, Arzt in Bern 1884
58. *Käch*, P., Sekundarlehrer in Bern 1880
59. *Kaufmann*, Alfr., Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern . 1886
60. *Kesselring*, H., Lehrer an der Sekundarschule in Bern . 1870
61. *Kissling*, Dr. E., Sekundarlehrer und Privatdocent, Bern . 1888
62. *Kobi*, Dr., Rektor der Kantonsschule Pruntrut . . . 1878
63. *Kocher*, Dr., Professor der Chirurgie, Bern 1872
64. *Koller*, G., Ingenieur, Bern 1872
65. *von Kostanecki*, Dr., Professor der Chemie, Bern . . 1896
66. *König*, Emil, Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . . 1893
67. *Körber*, H., Buchhändler in Bern 1872
68. *Kraft*, Alex., Besitzer des Bernerhofs, Bern. . . . 1872
69. *Krebs*, A., Seminarlehrer in Bern 1888
70. *Kronecker*, Dr. H., Professor der Physiologie, Bern . . 1884
71. *Kummer*, Dr. med. J., Arzt in Bern 1890
72. *Kürsteiner*, Dr. med., Bern 1895
73. **La Nicca*, Dr. med. R., Arzt in Bern 1899

74. *Lanz,* Dr. Em., Arzt in Biel 1876
75. *Leist,* Dr. K., Lehrer an der Sekundarschule in Bern . 1888
76. *Lerch,* M., Professor Dr. in Freiburg 1898
77. *v. Lerber,* A., Dr. med., Arzt in Laupen 1898
78. *Lindt,* Dr. med., Wilh., Arzt in Bern 1854
79. *Lindt,* Dr. med., W. jun., Arzt und Docent in Bern. . 1888
80. *Lochbrunner,* Th., Uhrmacher in Bern 1896
81. *Lory,* C. L., Rentier in Münsingen 1894
82. *Lüscher,* E., Dr. med. in Bern 1895
83. *Lütschg,* J., gewesener Waisenvater in Bern . . . 1872
84. *Marckwald,* Dr. Max, Frankfurt a. M. 1889
85. *Marti,* Christian, Sekundarlehrer in Nidau . . . 1889
86. *Marti,* Lehrer an der Neuen Mädchenschule in Bern. . 1892
87. *Michailoff,* S. Dr., meteorologische Centralstation Sofia . 1898
88. *Moser,* Dr. phil. Ch., Privatdocent in Bern . . . 1884
89. *Müller,* Emil, Apotheker in Bern 1882
90. *Müller,* Professor Dr., P., in Bern 1888
91. *Müller,* Max, Dr. med. in Bern. 1893
92. *v. Mutach,* Alfred, von Riedburg, Bern 1865
93. *Mützenberg,* Dr. med. Ernst, Spiez 1885
94. *Nanny,* Dr. Wilhelm, Arzt in Mühleberg 1890
95. *Nicolet,* L., Pharmacien, St. Imier 1892
96. *Pfister,* J. H., Mechaniker in Bern 1871
97. *Pflüger,* Dr. Professor in Bern 1889
98. *Pulver,* E., Apotheker in Interlaken 1890
99. *Pulver,* G., Vorsteher in Hindelbank 1891
100. *Reufer,* H., Dr. Prof. an der Handelsakademie in St. Gallen 1898
101. *Ris,* F., Lehrer der Physik am städtischen Gymnasium . 1869
102. *Rothenbach,* Alfred, Alt-Gasdirektor in Bern . . . 1872
103. *Rothenbühler,* Dr., Sekundarlehrer in Bern . . . 1896
104. *Rubeli,* Dr. O., Professor an der Thierarzneischule, Bern . 1892
105. *Sahli,* Professor Dr. H., Bern 1875
106. *Sahli,* Dr. W., Bern 1898
107. *Schaffer,* Dr., Kantonschemiker und Docent, Bern . . 1878
108. *Schlachter,* Dr., Gymnasiallehrer, Bern 1884
109. *Schmid,* Dr. W., Oberst, Oberinstruktor der Artillerie, Bern 1891
110. *Schürch,* Otto, Dr. phil., Zahnarzt, Langnau . . . 1898
111. *Schütz,* Assistent des Kantonschemikers, Bern . . . 1896
112. *Schwab,* Sam., Dr. med., Bern 1885
113. *Sidler,* Dr., Honorar-Professor, Bern 1856
114. *v. Speyr,* Dr. Prof., Direktor der Waldau . . . 1898
115. *Stäger,* Rob., Dr. med., Bern 1898
116. *Steck,* Th., Dr. phil., Conservator am Naturhist. Museum Bern 1878
117. *Steiger,* Hans, Oberstlieutenant, Bern. 1897
118. *Stooss,* Professor, Dr. med. Max, Arzt in Bern. . . 1883
119. *Strasser,* Dr. Hans, Professor der Anatomie, Bern . . 1872
120. *Strelin,* Alexander, Dr. med., Arzt, Bern 1898
121. *Streun,* G., Dr., Lehrer auf der Rütti 1898
122. *Studer,* Bernhard, sen., Bern 1844
123. *Studer,* Bernhard, Apotheker, Bern 1871
124. *Studer,* Dr. Theophil, Professor der Zoologie, Bern . . 1868

125. *Studer,* Wilhelm, Apotheker in Bern 1877
126. *Tambor,* J., Dr. phil., Docent, Laboratorium, Bern . . 1894
127. *Tanner,* G. H., Apotheker in Bern 1882
128. *Tavel,* Professor Dr. E., Bern 1892
129. *Thiessing,* Dr., Redaktor, Bern 1867
130. *v. Tscharner,* Dr. phil. L., Oberst, Bern 1874
131. *v. Tscharner-de Lessert,* Oberst, Bern 1878
132. *Tschirch,* Dr. A., Professor der Pharmakognosie in Bern . 1890
133. *Valentin,* Professor Dr. med. Ad., Arzt in Bern . . 1872
134. *Vögeli,* H., Dr. med., Thun 1898
135. *Volz,* Wilhelm, Apotheker in Bern 1887
136. *Wäber-Lindt,* A., Bern 1864
137. *Walthard,* Max, Dr. med., Arzt in Bern 1894
138. *Wanzenried,* Sekundarlehrer in Grosshöchstetten . . 1867
139. *v. Wattenwyl-v. Wattenwyl,* Jean, Oberst, Bern . . 1877
140. *Wilhelmi,* A., Dr. Thierarzt, Bern 1898
141. *Wollensack,* Heinrich, Dr. med., Giessbach . . . 1898
142. *Wüthrich,* Dr. phil. E., Direktor der Molkereischule Rütti 1892
143. *Wyss,* Dr. G., Buchdrucker in Bern 1887
144. *Wyttenbach-v. Fischer,* Dr., Arzt in Bern 1872
145. *Zeller,* R., Dr. phil., Geolog, Bern 1893
146. *Ziegler,* Dr. med., A., eidgenössischer Oberfeldarzt, Bern . 1859
147. *Zumstein,* Dr. med. J. J., in Marburg 1885
148. *Zwicky,* Lehrer am städtischen Gymnasium, Bern . . 1856

Im Jahre 1899 ausgetreten:

Baumberger, E., Sekundarlehrer in Basel 1890
Hafner, René, Apotheker in Biel 1891
Holzer, Ferd., Lehrer in Oberwyl bei Büren 1890
Jonquière, Dr., Professor der Medizin, Bern 1853
Münger, F., Dr. phil. 1892
Otti, Prof. in Aarau . . . . . —
Schönenberger, eidgenössischer Forstadjunkt, Bern . . . 1894
de Zehender, Marq., Ingenieur, Bern 1874

Korrespondierende Mitglieder:

1. *Flesch,* Dr. M., Arzt in Frankfurt 1882
2. *Gasser,* Dr. E., Professor der Anatomie in Marburg . . 1884
3. *Graf,* Lehrer in St. Gallen 1858
4. *Grützner,* Dr. A., Professor in Tübingen 1881
5. *Hiepe,* Dr. Wilhelm, in Birmingham 1874
6. *Imfeld,* Xaver, Topograph in Hottingen 1880
7. *Krebs,* Gymnasiallehrer in Winterthur 1864
8. *Landolf,* Dr., in Chili 1881
9. *Lang,* Dr. A., Professor in Zürich 1876

10. *Leonhard*, Dr.. Veterinär in Frankfurt 1870
11. *Lichtheim*, Professor in Königsberg 1881
12. *Metzdorf*, Dr. Prof. der Vet.-Schule in Proskau, Schlesien . 1870
13. *Petri*, Dr. Ed., Professor der Geographie in St. Petersburg 1883
14. *Regelsperger*, Gust., Dr., rue la Boétie 85, Paris . . 1883
15. *Rothenbach*, Lehrer am Lehrerseminar in Küssnacht . . 1871
16. *Wälchli*, Dr. med. D. J. Buenos Ayres 1873
17. *Wild*, Dr. Professor, in Zürich 1859

Rechnung der bernischen naturforschenden Gesellschaft pro 1898.

Einnahmen:

An Jahresbeiträgen	1128.—
An Eintrittsgeldern	100.—
An Zinsen	99.90
An Kapital (Reservefonds)	500.—
An verkauften Mitteilungen	4.50
	1832.40

Ausgaben:

Passiv-Saldo letzter Rechnung	123.05
Mitteilungen	450.85
Bibliothek	193.05
Lesezirkel	31.95
Sitzungen	183.85
Jahresversammlung d. schweiz. naturf. Gesellschaft	474.80
Diversa	86.95
	1544.50

Bilanz:

Einnahmen	1832.40
Ausgaben	1544.50
Aktiv-Saldo	287.90

Reservefonds:

Saldo letzter Rechnung	2300.—
Ablösung im Jahre 1898	500.—
Saldo auf 31. Dezember 1898	1800.—

Vermögensetat:

Das Vermögen der bernischen naturforschenden Gesellschaft besteht auf 31. Dezember 1898 in dem Reservefonds wie oben	1800.—
Dem Aktiv-Saldo pro 1898	287.90
	2087.90
Auf 31. Dezember 1897 betrug das Vermögen	2176.95
Auf 31. Dezember 1898 betrug dasselbe	2087.90
Es ergiebt sich demnach eine Verminderung um	Fr. 89.05

Der Kassier:

B. Studer-Steinhäuslin.

Genehmigt in der Sitzung vom 25. November 1899.

Dr. Ch. Moser.

Ueber eine mit der Umlaufszeit der Planeten zusammenhängende Relation.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 12. Nov. 1898.)

I. Einleitende Bemerkungen. Geschichtliches.

Das ganze wissenschaftliche Gebäude der mathematischen Astronomie, wie es in den letzten zwei Jahrhunderten mit so vielem Geschicke und mit so grosser Eleganz und Vollkommenheit konstruirt wurde, gründet sich in der Hauptsache auf das Gesetz der allgemeinen Gravitation.

Es ist bewundernswürdig, mit welchem Scharfsinn und welcher zwingenden Logik schon *Newton* eine grosse Zahl von wichtigen Konsequenzen aus der Existenz des Gesetzes der allgemeinen Gravitation abzuleiten verstund. Dies geschah namentlich in seiner im Jahre 1686 erschienenen, epochemachenden, jedoch anfangs verhältnismässig wenig beachteten Arbeit «*Mathematische Prinzipien der Naturlehre*», einem der schönsten Denkmäler mathematisch-naturwissenschaftlicher Forschung.*)

Seither ist die rechnende Astronomie durch viele Erfolge gekrönt worden, namentlich seitdem das Gravitationsgesetz durch die sog. *Lagrange*'schen Fundamentalgleichungen einen glücklichen und sinnreichen mathematischen Ausdruck gefunden hat.

Wir geben zwar zu, dass — im Gegensatze zu manchen übrigen Zweigen der Forschung — die Fortschritte auf dem Gebiete der mathematischen Astronomie nur gemessene sind, und dass auch hier, trotz den glänzenden Arbeiten eines *Laplace, Gauss, Bessel, Leverrier, Tisserand* und anderer Männer, der Zukunft sich noch ein grosses Arbeitsfeld bietet. Ja, *H. Poincaré*, wohl einer der anerkanntesten der jetzt lebenden Mathematiker, kommt in seiner berühmten, vom schwedischen Könige preisgekrönten Arbeit über das Drei-Körper-Problem zu der Ueberzeugung, dass die vollständige Lösung dieses

*) Sir Isaac Newtons mathematische Prinzipien der Naturlehre wurden von *J. Ph. Wolfers* ins Deutsche übersetzt und sind im Verlag von Robert Oppenheim in Berlin erschienen.

Problems — wenn man je eine solche werde finden können, noch wesentlich andere und feinere mathematische Hülfsmittel, als wir sie jetzt besitzen*), erfordere. Damit wollen wir sagen, dass auf dem Gebiete der mathematischen Astronomie die zufälligen Entdeckungen nahezu ausgeschlossen sind. Die grossen Fortschritte, wie z. B. die Auffindung des Gesetzes der allgemeinen Gravitation, sind hier ebenso sehr, wenn nicht noch mehr als anderswo, das Produkt reiflicher, ja jahrelanger Ueberlegung und ernster, nicht nachlassender Arbeit.

Newton sagt uns denn auch selbst, dass er nur durch jahrelange Arbeit und auf das Drängen *Edmund Halley's*, seines Freundes, hin, dazu gekommen sei, der Herausgabe der erwähnten mathematischen Prinzipien näher zu treten.

Mit der in manchen Lehrbüchern stehenden bekannten Anekdote von dem vom Baume fallenden Apfel wird es daher nicht weit her sein. Dennoch wollen Sie mir gestatten, dieses anschauliche Bild zu benutzen, um speziell zu dem Gegenstand unserer heutigen bescheidenen Untersuchung überzugehen.

Die reifen Aepfel des Baumes fallen, sofern auf dieselben keine sie seitwärts verschiebende Kraft wirkt, in gerader Richtung nach der Erde hin.

Was würde in unserem Sonnensysteme mit den Planeten geschehen, wenn alle sie seitlich verschiebenden Kräfte verschwinden, mit anderen Worten, wenn die sog. Tangentialkraft plötzlich erlöschen würde? Wie die Aepfel fallen, würden die Planeten nach dem grossen und mächtigen, alles beherrschenden Centralkörper, nach der Sonne, hinstürzen.

Man kann nun die Fallzeit berechnen, die die einzelnen Planeten brauchen würden, um bei der Sonne anzulangen.

Wenn die Planeten sich in ihren mittleren Entfernungen von der Sonne befinden, so erhält man z. B.

für Merkur 15,55 mittlere Sonnentage,
für Venus 39,73 mittlere Sonnentage,
für die Erde 64,57 mittlere Sonnentage

und so fort.

---

*) *H. Poincaré.* Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Acta mathematica, herausgegeben von *G. Mittag-Leffler.* Band 13, Seite 6.

Die Fallzeiten schwanken von etwa einem halben Monat, für Merkur, bis zu mehr als 29 Jahren, für Neptun.

Ein ruhender Körper, der sich in der Entfernung der Venus von der Sonne befindet, wird also etwas mehr als einen Monat Zeit gebrauchen, um bei der Sonne anzukommen. Die Erde selbst würde, wenn die Tangentialkraft plötzlich erlöschen würde, etwas mehr als zwei Monate erfordern. Sie würde sich in immer rascherem Laufe der Sonne nähern und schliesslich mit der kolossalen Geschwindigkeit von etwa 600 000 m in der Sekunde mit der Sonne zusammenprallen.

Bemerkenswerth an diesen Fallzeiten nach der Sonne ist nun, dass sie mit den Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne in engem Zusammenhange stehen. Vor etwa 30 Jahren wurde nämlich die Wahrnehmung gemacht, dass, wenn wir diese Fallzeiten mit einer bestimmten Constanten multipliziren, wir just die Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne erhalten. Man vergleiche hierzu die Mittheilung und Beweisführung von *H. Rapin* im «Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles.» Vol. XVII.

C. Flammarion, der die genannte Wahrnehmung, unabhängig von andern, ebenfalls gemacht hat, gibt in seiner viel verbreiteten «Astronomie populaire» im wesentlichen nachstehende Zusammenstellung. Dabei bedeutet die erste Zahl die Fallzeit nach der Sonne, in mittleren Sonnentagen, τ_1, die zweite Zahl ist eine Constante, $\sqrt{32}$, und das Produkt, die dritte Zahl, die Umlaufszeit des Planeten um die Sonne, ebenfalls in mittleren Sonnentagen, T.

Merkur . .	15,55.	5,656854	=	88,0,
Venus . .	39,73.	5,656854	=	224,7,
Erde . . .	64,57.	5,656854	=	365,3,
Mars . . .	121,44.	5,656854	=	687,0,
Jupiter . .	765,87.	5,656854	=	4332,4,
Saturn . .	1902,03.	5,656854	=	10759,5,
Uranus . .	5424,57.	5,656844	=	30686,0,
Neptun . .	10628,73.	5,656854	=	60125,2,

Hiernach ist also:

$$\tau_1 \cdot \sqrt{32} = T$$

oder

$$\tau_1 = \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (1).$$

Der Zusammenstellung fügt der Autor wörtlich hinzu:

«Ce qu'il y a de plus curieux dans ces durées, c'est qu'en les multipliant toutes par un même chiffre, on reproduit l'année de chaque planète.

La première fois que j'ai fait cette remarque (c'était au commencement de l'année 1870), j'en suis resté perplexe pendant des mois entiers, et j'avais beau m'ingénier, ou chercher dans les livres, aucun principe de la mécanique céleste ne me mettait sur la voie pour en découvrir la cause. Quel était ce fameux coefficient 5,656 854? C'est la racine carrée de 32.

Mais qu'est-ce que cette racine carrée a à faire dans ce rapport si curieux et si inattendu entre les révolutions des planètes et leurs chutes dans le soleil?»

Dann wird eine Erklärung gegeben, in der die Fallzeit nach der Sonne hin als die halbe Umlaufszeit eines in langgestreckter Ellipse um die Sonne sich bewegenden Körpers angesehen wird. Die Anwendung des dritten *Kepler*'schen Gesetzes gibt dann sofort für die Constante den Werth $\sqrt{32}$.

Die durch die Gleichung (1) ausgedrückte Beziehung ist übrigens, wie am angegebenen Orte Rapin schreibt, schon vor Flammarion von *Adolphe de Saussure* bemerkt worden.

Mit Recht hält sich Rapin über das Erstaunen Flammarions auf und bemerkt, die Beziehung könne vielleicht nur desshalb etwas Ausserordentliches haben, dass sie so lange der astronomischen Rechnung entgangen sei.

R. Wolf, in seinem prächtigen Handbuch der Astronomie,*) nennt die Beziehung eine «merkwürdige». Dies veranlasst mich, derselben etwas näher zu treten, und sie nach zwei Richtungen hin zu verallgemeinern.

II. Verallgemeinerung.

Die Gleichung (1) erfordert, dass die Planeten in ihren mittlern Entfernungen von der Sonne sich befinden. Dies kommt aber im allgemeinen selten vor, während einer Umlaufszeit nur zweimal.

Bald wird die Entfernung von der Sonne grösser, als die mittlere, bald kleiner, infolge der elliptischen Bahnen der Planeten.

*) *R. Wolf.* Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur. In zwei Bänden. Zürich. Druck und Verlag von F. Schulthess. Vierter Halbband. No. 484, am Schluss.

Demnach muss sich auch der Werth der Fallzeit nach der Sonne ändern. Bezeichnen wir denselben mit

$$t_1,$$

so ist t_1 grösser als τ_1, wenn der Planet weiter entfernt ist, als die mittlere Distanz Planet-Sonne beträgt, dagegen kleiner als τ_1, wenn der Planet in seiner Bahn sich näher bei der Sonne befindet. Während einer Umlaufszeit des Planeten ändert die Fallzeit t_1, beständig ihren Werth, dagegen bleibt T constant.

Um die Relation zwischen der Fallzeit nach der Sonne und der Umlaufszeit darstellen zu können, müssen wir daher schreiben:

$$t_1 = F_\alpha \cdot \tau_1,$$

das heisst, wenn wir für τ_1 seinen Werth aus der Gleichung (1) substituiren:

$$t_1 = F_\alpha \cdot \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (2).$$

Der Faktor F_α wird sich für jede Entfernung des Planeten von der Sonne numerisch darstellen lassen. Ob sich für denselben jedoch ein einfaches mathematisches Gesetz ergibt, wird die Untersuchung, die nachstehend ausgeführt ist, zu zeigen haben. Jedenfalls können wir jetzt schon so viel sagen, dass für die mittlere Entfernung des Planeten von der Sonne

$$t_1 = \tau_1$$

und daher

$$F_\alpha = 1$$

sein muss.

Die zweite Verallgemeinerung, die sich ebenfalls sofort aufdrängt, besteht darin, dass wir die Fallzeit nach der Sonne nicht gleich für den ganzen Weg Planet-Sonne, sondern nur für einen Theil dieses Weges in Beziehung zur Umlaufszeit des Planeten setzen. Diese Verallgemeinerung drängt sich uns namentlich auch dann auf, wenn wir bedenken, dass weder die Sonne, noch die Planeten mathematische Punkte sind, sondern mit ihren Massen ein gewisses Volumen erfüllen, dass also die Distanz zwischen den nächstliegenden Punkten beider Körper kleiner ist, als die Distanz r der in Rechnung gebrachten zwei Massenpunkte, in deren einem wir uns die Masse der Sonne, im andern die Masse des Planeten konzentrirt denken.

Bezeichnen wir daher einen Theil, etwa den n. Theil der Distanz r, mit s_n, so ist die Fallzeit für den Fallraum

$$s_n = \frac{r}{n}$$

in Beziehung zu setzen zur Umlaufszeit T des Planeten. Sei diese Fallzeit nach der Sonne für den Fallraum s_n gleich

$$t_n,$$

so können wir wieder für alle Werthe n,

$$1 \leqq n \leqq \infty,$$

die numerische Relation aufstellen:

$$t_n = F_\beta \cdot t_1 \qquad (3).$$

wo F_β offenbar in den Grenzen 1 und 0 eingeschlossen ist. Ob sich auch für den Faktor F_β ein einfaches mathematisches Gesetz ergibt, lehrt uns ebenfalls die nachstehende Untersuchung.

Wenn wir die Gleichungen (2) und (3) kombiniren, erhalten wir:

$$t_n = F_\alpha \cdot F_\beta \cdot \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (4).$$

Indem man

$$F = F_\alpha \cdot F_\beta \qquad (5).$$

setzt, folgt endlich:

$$t_n = F \cdot \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (6).$$

Wir wollen nun im Nachstehenden zeigen, dass F ein einfaches mathematisches Gesetz befolgt und für alle elliptischen Bahnen den positiven Werth von $\sqrt{8}$ nicht übersteigen kann.

III. Bestimmung der Fallzeit t_n.

Die Masse der Sonne sei gleich 1, diejenige des betrachteten Planeten gleich m. Wir denken uns die Massen je in den Punkten S und P konzentrirt. Die Entfernung dieser beiden Punkte sei r. Die Masse 1 möge in der Entfernung f die Anziehung 1 ausüben. Unmittelbar vor dem Beginne der Fallzeit mögen beide Massen sich relativ in Ruhe befinden. Sie mögen ferner keinen störenden Wirkungen eines dritten Körpers ausgesetzt sein. Wir führen also die Betrachtung für das Zwei-Körper-Problem durch. Nach der Zeit t haben beide Körper die Entfernung

$$r - s.$$

Die Annäherung der beiden Körper beträgt also s. Selbstverständlich fällt nicht nur der Körper m gegen die Sonne, sondern auch die Sonne, und wenn ihre Masse noch so gross wäre, gegen den Körper m. In der Entfernung $r - s$ übt, wenn die Kraft im umge-

kehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkt, die Masse 1 die Anziehung

$$\frac{f^2}{(r-s)^2}$$

aus und entsprechend die Masse m die Anziehung

$$m\,\frac{f^2}{(r-s)^2}.$$

Die Beschleunigung der Annäherung beträgt alsdann zusammen:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = (1+m)\,\frac{f^2}{(r-s)^2} \qquad (7).$$

Die Integration der Gleichung (7) bietet bekanntlich keinerlei Schwierigkeiten und lässt sich genau ausführen.

Da identisch

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\,\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$$

ist, so folgt, unter Berücksichtigung von (7), nachdem man beiderseitig mit dt multiplicirt hat und dann integrirt:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\,(1+m)\,f^2\int\frac{ds}{(r-s)^2} + \text{Const.} \qquad (7')$$

Führt man die Integration aus und berücksichtigt, zur Bestimmung der Constanten, dass für $s = o$ die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = o$ ist, so folgt:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\,(1+m)\,f^2\left(\frac{1}{r-s} - \frac{1}{r}\right) \qquad (8)$$

und hieraus:

$$dt = \frac{\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}}\sqrt{\frac{r-s}{s}}\,ds \qquad (9),$$

wo wir die Quadratwurzeln als positiv verstehen.

Aus (9) wird:

$$t = \frac{\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}}\int\sqrt{\frac{r-s}{s}}\,ds + \text{Const.} \qquad (10).$$

Die Constante bestimmen wir so, dass für $s = o$, ebenfalls $t = o$ wird.

Um

$$J = \int \sqrt{\frac{r-s}{s}}\, ds$$

auszumitteln, setze man:

$$s = r \sin^2 \varphi.$$

Führt man die Substitution aus, so wird

$$J = r \int (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi.$$

Man erhält mithin das folgende Resultat, wobei wir die auftretenden Quadratwurzeln ebenfalls als positiv verstehen wollen:

$$J = r \left(\arcsin \sqrt{\frac{s}{r}} + \sqrt{\frac{s}{r}\left(1 - \frac{s}{r}\right)} \right),$$

folglich geht (10) über in:

$$t = \frac{r\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}} \left(\arcsin \sqrt{\frac{s}{r}} + \sqrt{\frac{s}{r}\left(1 - \frac{s}{r}\right)} \right) + \text{Const.}$$

Setzt man die Grössen s und t gleich null, so sieht man, dass auch die Constante gleich null sein muss, wenn wir die periodische Funktion $\arcsin \sqrt{\frac{s}{r}}$ so verstehen, dass sie für $s = o$, mit null zu beginnen habe. Wir erhalten also:

$$t = \frac{r\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}} \left(\arcsin \sqrt{\frac{s}{r}} + \sqrt{\frac{s}{r}\left(1 - \frac{s}{r}\right)} \right),$$

mithin, wenn

$$\frac{r}{s} = n$$

ist:

$$t_n = \frac{r\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}} \left(\arcsin \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \right) \qquad (11).$$

Gleichung (11) lässt sich auch folgendendermassen schreiben:

$$t_n = \frac{\frac{r}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}} (\omega + \sin \omega) \qquad (12),$$

wo

$$\sin \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

ist. Die periodische Funktion ω hat, für $n = \infty$, entsprechend der vorgenommenen Constantenbestimmung, mit null anzufangen. Mit obiger Gleichung (12) ist der Werth der Fallzeit t_n ermittelt.

IV. Beziehung der Fallzeit t_n zur Umlaufszeit T.

Wenn wir die im vorigen Abschnitte gewählten Bezeichnungen, für die Massen der Sonne und des Planeten sowie für die Distanz f (*Gauss*'sche Zahl), beibehalten und mit a die mittlere Entfernung des Planeten von der Sonne, oder die halbe grosse Axe der Bahn-Ellipse, bezeichnen, so ist die Umlaufszeit T des Planeten um die Sonne bekanntlich gegeben durch die Gleichung:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{f\sqrt{1+m}} \tag{13},$$

wobei π die bekannte Transcendente bedeutet. Für die Ableitung von (13), die in jedem Lehrbuche enthalten ist, vergleiche man z. B. das erwähnte Handbuch von *R. Wolf*, Seite 328, oder auch *F. Tisserand*, in seinem «Traité de Mécanique céleste», Bd. I, Seite 99.

Aus den Gleichungen (12) und (13) lassen sich die von den Massen abhängigen Grössen eliminiren, und wir erhalten die unserer Verallgemeinerung entsprechende charakteristische Relation:

$$t_n = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{\omega + \sin\omega}{\pi} \cdot \frac{T}{\sqrt{32}} \tag{14}.$$

Man erhält also für den Faktor F den Werth:

$$F = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{\omega + \sin\omega}{\pi} \tag{15}$$

und sieht, dass er sich in der That durch einen einfachen analytischen Ausdruck darstellen lässt. Derselbe liesse sich, was wir hier nicht ausführen wollen, mit der Cykloide in Verbindung bringen.

Ist $n = 1$, so wird $\sin\omega = 0$, $\omega = \pi$, also

$$t_1 = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{T}{\sqrt{32}} \tag{16}.$$

Somit ist

$$F_a = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \tag{17}.$$

Wird in (14) der Abstand r gleich dem mittlern Abstand a gesetzt, so geht t_n in τ_n über, und wir haben:

$$\tau_n = \frac{\omega + \sin \omega}{\pi} \cdot \frac{T}{\sqrt{32}}. \qquad (18).$$

Der Faktor F_β ergibt sich zu:

$$F_\beta = \frac{\omega + \sin \omega}{\pi}, \qquad (19),$$

wo nach der Voraussetzung

$$\sin \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

ist und ω, für $n = \infty$, den Werth null hat.

Wir wollen noch zeigen, welche Grenzen F für die elliptischen Bahnen annehmen kann.

Für die nämliche elliptische Bahn ist a constant und r liegt innerhalb der Grenzen:

$$a(1-e) \leqq r \leqq a(1+e),$$

wo e die numerische Excentrizität der Bahn-Ellipse darstellt.

Dividiren wir mit der positiven Grösse a, so erhalten wir:

$$(1-e) \leqq \frac{r}{a} \leqq (1+e).$$

Nehmen wir endlich den Grenzwerth von e, $e = 1$, an, so wird die elliptische Bahn zu einer parabolischen. Wir erhalten also:

$$0 \leqq \frac{r}{a} \leqq 2,$$

mithin

$$0 \leqq \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \leqq \sqrt{8} \qquad (20),$$

wo wir die Quadratwurzel immer positiv verstehen.

Wir haben schon früher gesehen, dass der Faktor F_β in den Grenzen 0 und 1 eingeschlossen sein muss. Dies ist auch thatsächlich der Fall, da wir $\sqrt{\frac{1}{n}}$, also auch $\sin \frac{\omega}{2}$ positiv verstanden haben und die periodische Funktion ω, für $n = \infty$, nach der vorgenommenen Constantenbestimmung mit null zu beginnen hat.

Multipliziren wir also in der Relation (20) die untere Grenze 0 mit dem kleinsten Werthe von F_β, mit 0, und die obere Grenze, $\sqrt{8}$, mit dem grössten Werthe von F_β, mit 1, so erhalten wir

$$0 \leqq F \leqq \sqrt{8} \qquad (21).$$

Der Faktor F kann also für alle Punkte des Raumes die Grenzen 0 und 2, 82843 nicht überschreiten.

Spezialisiren wir die Gleichung (14) noch für den Fall $n = 2$, so folgt:

$$t_2 = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right)\frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (22).$$

Für den fernern Spezialfall, $n = 1$, die Erde und den heutigen Abend (12. November 1898) erhalten wir als Werth des Faktors F, wenn wir nach dem Annuaire du Bureau des Longitudes

$$r = 146{,}91$$

und

$$a = 148{,}49$$

Milliarden m setzen:

$$F = 0{,}9841.$$

Würde die Tangentialkraft jetzt plötzlich erlöschen, so würde demnach die Erde in

$$t_1 = 0{,}9811 \cdot \frac{365{,}26}{\sqrt{32}}$$

$$= 63.54$$

mittlern Sonnentagen sich mit der Sonne vereinigt haben.

* * *

Stellen wir zum Schlusse noch einige Resultate zusammen.

1. Zwischen der Umlaufszeit T eines Planeten um die Sonne und der Fallzeit t_n, *die erforderlich ist, um den n. Theil des Fallraumes Planet-Sonne zurückzulegen, besteht die Relation:*

$$t_n = F \cdot \frac{T}{\sqrt{32}}.$$

2. Der Faktor F hat folgenden Werth:

$$F = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{\omega + \sin \omega}{\pi},$$

wo r den ganzen Fallraum Planet-Sonne und a die grosse Halbaxe der Planetenbahn darstellt, $\left(\frac{r}{a}\right)^{3/2}$ *mit seinem positiven Werthe zur Anrechnung gelangt,* $\sin\frac{\omega}{2}$ *den positiven Werth von* $\sqrt{\frac{1}{n}}$, ω *den kleinsten dieser Definition entsprechenden positiven Bogenwerth und* π *die bekannte Transcendente bedeutet.*

3. Der Faktor F ist unabhängig von der Masse des Planeten.

4. Der Werth von F liegt für jeden Punkt der elliptischen Bahn innerhalb der Grenzen 0 und 2,82843.

5. Für $n = 1$ *und* $r = a$ *ergibt sich, wenn in diesem Spezialfalle* t_n *mit* τ_1 *bezeichnet wird, die von A. de Saussure aufgestellte Relation,* $\tau_1 = \frac{T}{\sqrt{32}}$.

Georg Sidler.

Über eine algebraische Reihe.

(Eingereicht den 28. Juni 1899.)

§ 1. Der absolute Wert der Variabeln x sei < 1, und n eine ganze positive Zahl inklusive null. Unter diesen Voraussetzungen betrachten wir die Funktion

(1.) $$S_n = 1 + 2^n \cdot x + 3^n \cdot x^2 + 4^n \cdot x^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

Wir haben

(2.) $$S_n = \frac{d}{dx}(x \cdot S_{n-1}).$$

Da nun andererseits $S_0 = \frac{1}{1-x}$, so erhalten wir aus (2.) successive

$$S_1 = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad S_2 = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad S_3 = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4},$$

$$S_4 = \frac{1+11x+11x^2+x^3}{(1-x)^5}, \quad S_5 = \frac{1+26x+66x^2+26x^3+x^4}{(1-x)^6}$$

und allgemein für ein beliebiges ganzes und positives n

Obstehendes ist grössernteils eine Übertragung einer in Band I (Jahrgang 1856) der «Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich» von mir publizierten Arbeit «Sur une série algébrique.» Den Anstoss, auf dieselbe zurückzukommen, gab das Interméd. des Math. Jahrgang 1899, p. 51, wo in Nr. 1465 nach dem Beweise einer Formel gefragt wird, die als spezieller Fall für $k = 0$ in der obigen Formel 9 enthalten ist. Jener frühern Arbeit hinzugefügt habe ich den Beweis des Clausen-Staudt'schen Satzes über die Bernoullischen Zahlen, der, wie mich s. Z. L. Schläfli darauf aufmerksam gemacht, in einfacher Weise aus einer von mir gegebenen independenten Darstellung der genannten Zahlen hervorgeht. Ausdrücklich bemerke ich, dass die betreffende Formel 25 wie die übrigen hier gegebenen Darstellungen der Bernoullischen Zahlen, mit Ausnahme von 23 und 26, sich schon in der obgenannten, 1856 von mir publizierten Arbeit finden.

$$(3.) \qquad S_n = \frac{a_{n,0} + a_{n,1} \cdot x + a_{n,2} \cdot x^2 \ldots + a_{n,n-1} \cdot x^{n-1}}{(1-x)^{n+1}},$$

wo $a_{n,0}$, $a_{n,1}$, $a_{n,2} \ldots a_{n,n-1}$ ganze positive Zahlen darstellen, und wo $a_{n,s} = 0$, sobald das ganzzahlige s sei es negativ, sei es $> n-1$ ist.

In der That, führen wir diesen Ausdruck in (2.) ein, so sehen wir, dass derselbe für ein beliebiges ganzes und positives n gilt. Und für die Coeffizienten $a_{n,s}$ ergiebt sich die Relation

$$(4.) \qquad a_{n,s} = (s+1) \cdot a_{n-1,s} + (n-s) \cdot a_{n-1,s-1}.$$

Gemäss den obigen Ausdrücken für S_1, S_2, . . S_5 ist für $n = 1$, 2, 3, 4, 5

$$(5.) \qquad a_{n,s-1} = a_{n \cdot n-s}.$$

Aus (4.) aber geht hervor

$$a_{n,n-s} = (n-s+1) \cdot a_{n-1,n-s} + s \cdot a_{n-1,n-s-1}$$
$$a_{n,s-1} = (n-s+1) \cdot a_{n-1,s-2} + s \cdot a_{n-1,s-1}.$$

Wenn also die Relation (5.) für den Index $n-1$ gilt, so gilt dieselbe auch für den Index n, und somit gilt dieselbe allgemein.

Schreiben wir die Formel (3.)

$$a_{n,0} + a_{n,1} \cdot x + a_{n,2} \cdot x^2 \ldots + a_{n,n-1} \cdot x^{n-1} = (1-x)^{n+1} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^n \cdot x^s$$

und setzen die Coeffizienten derselben Potenzen von x auf beiden Seiten einander gleich, so kommt, wenn wir mit $\binom{n}{s}$ den Coefficienten von x^s in der Entwicklung von $(1+x)^n$ bezeichnen:

$$a_{n,0} = 1^n$$

$$a_{n,1} = 2^n - \binom{n+1}{1} \cdot 1^n$$

$$a_{n,2} = 3^n - \binom{n+1}{1} \cdot 2^n + \binom{n+1}{2} \cdot 1^n$$

u. s. w.

$$(6.) \quad a_{n,s} = (s+1)^n - \binom{n+1}{1} s^n + \binom{n+1}{2} \cdot (s-1)^n \ldots \ldots (-1)^s \cdot \binom{n+1}{s} \cdot 1^n,$$

und weiter gewinnen wir die Identität $0 = a_{n,n+s}$, d. h.

$$(7.)\quad 0 = (n+s+1)^n - \binom{n+1}{1}(n+s)^n + \binom{n+1}{2}(n+s-1)^n \ldots$$
$$\ldots (-1)^{n+1} \cdot \binom{n+1}{n+1} \cdot s^n,$$

wo s eine ganze positive Zahl inklusive null und n eine der Zahlen 1, 2, 3 . . . in inf.

§ 2. Aus der Rekursionsgleichung (4) folgt

$$\sum_{s=0}^{n-1} a_{n,s} = \sum_{s=0}^{n-2}(s+1) \cdot a_{n-1,s} + \sum_{s=1}^{n-1}(n-s) \cdot a_{n-1,s-1} =$$
$$= \sum_{s=0}^{n-2}\{(s+1)\, a_{n-1,s} + (n-s-1)\, a_{n-1,s}\}$$

d. h.

$$\sum_{s=0}^{n-1} a_{n,s} = n \cdot \sum_{s=0}^{n-2} a_{n-1,s} = n!\, a_{1,0}$$

Aber $a_{1,0} = 1$, und somit

$$(8.)\qquad a_{n,0} + a_{n,1} + a_{n,2} \ldots + a_{n,n-1} = n!$$

und da $a_{n,n+s} = 0$, wenn s eine beliebige positive ganze Zahl inklusive null ist, so können wir diese Relation schreiben:

$$\sum_{s=0}^{n+h-1} a_{n,s} = n!$$

wo h eine beliebige positive ganze Zahl inklusive null, d. h. wenn wir für $a_{n,s}$ die Ausdrücke (6.) einsetzen:

$$n! = 1^n \cdot \left\{1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \ldots (-1)^{n+h-1} \binom{n+1}{n+h-1}\right\} +$$
$$+ 2^n \cdot \left\{1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \ldots (-1)^{n+h-2} \binom{n+1}{n+h-2}\right\} +$$
$$+ 3^n \cdot \left\{1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \ldots (-1)^{n+h-3} \binom{n+1}{n+h-3}\right\} +$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (n+h-1)^n \cdot \left\{ 1 - \binom{n+1}{1} \right\} +$$

$$+ (n+h)^n.$$

Aber $1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \ldots (-1)^s \binom{n+1}{s}$ ist der Coeffizient von x^s in der Entwicklung von $(1-x)^{-1} \cdot (1-x)^{n+1}$ also

$$(\alpha.) \quad 1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \ldots (-1)^s \binom{n+1}{s} = (-1)^s \binom{n}{s},$$

und wir erhalten

$$(9.) \qquad n! =$$

$$= (n+k)^n - \binom{n}{1}(n+k-1)^n + \binom{n}{2}(n+k-2)^n \ldots$$

$$\ldots (-1)^{n+k-1} \cdot \binom{n}{n+k-1} \cdot 1^n$$

oder auch

$$(9.^1) \qquad n! =$$

$$= (n+k)^n - \binom{n}{1}(n+k-1)^n + \binom{n}{2}(n+k-2)^n \ldots (-1)^n \binom{n}{n} k^n,$$

wo k eine beliebige positive ganze Zahl inklusive null darstellt.

§ 3. Zerlegen wir den Ausdruck rechter Hand in (3.) in Partialbrüche, indem wir setzen

$$(u.) \quad \frac{a_{n,0} + a_{n,1} \cdot x \ldots + a_{n,n-1} \cdot x^{n-1}}{(1-x)^{n+1}} =$$

$$= \frac{A_{n,n}}{(1-x)^{n+1}} - \frac{A_{n,n-1}}{(1-x)^n} \ldots (-1)^{n-1} \cdot \frac{A_{n,1}}{(1-x)^2}.$$

Schreiben wir $x = 1 - h$, so haben wir

$$A_{n,n} - A_{n,n-1} \cdot h + \ldots A_{n,n-2} h^2 \ldots (-1)^{n-1} \cdot A_{n,1} \cdot h^{n-1} =$$

$$= a_{n,0} + a_{n,1} \cdot (1-h) + a_{n,2} \cdot (1-h)^2 \ldots + a_{n,n-1} \cdot (1-h)^{n-1},$$

und hieraus, wenn wir die Coeffizienten derselben Potenzen von h einander gleich setzen

$$A_{n,n} = a_{n,0} + a_{n,1} + a_{n,2} \ldots + a_{n,n-1}$$

$$A_{n,n-1} = \binom{1}{1} a_{n,1} + \binom{2}{1} a_{n,2} \ldots + \binom{n+1}{1} a_{n,n-1}$$

$$A_{n,n-2} = \binom{2}{2} a_{n,2} + \binom{3}{2} a_{n,3} \cdots + \binom{n-1}{2} a_{n,n-1}$$

. . . . . .

$$A_{n,1} = \binom{n-1}{n-1} a_{n,n-1}$$

oder mit Rücksicht auf die Relation (5)

$$(10.)\begin{cases} A_{n,1} = a_{n,0} \\ A_{n,2} = \binom{n-1}{1} a_{n,0} + a_{n,1} \\ A_{n,3} = \binom{n-1}{2} a_{n,0} + \binom{n-2}{1} a_{n,1} + a_{n,2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n,n} = \binom{n-1}{n-1} a_{n,0} + \binom{n-2}{n-2} a_{n,1} \cdots + \binom{1}{1} a_{n,n-2} + a_{n,n-1} \end{cases}$$

oder allgemein

$$(10.^1) \qquad A_{n,s} = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n-k-1}{s-k-1} a_{n,k}.$$

Auch die Coeffizienten $A_{n,s}$ sind somit ganze positive Zahlen.

Schreiben wir aber mit Beachtung, dass $a_{n,s-1} = a_{n,n-s}$ ist: die Gleichung (u).

$$a_{n,n-1} + a_{n,n-2} \cdot x \cdots + a_{n,1} \cdot x^{n-2} + a_{n,0} \cdot x^{n-1} =$$
$$= A_{n,n} - A_{n,n-1}(1-x) + A_{n,n-2}(1-x)^2 \ldots (-1)^{n-1} \cdot A_{n,1}(1-x)^{n-1},$$

und vergleichen die Coeffizienten der nämlichen Potenzen von x mit einander, so erhalten wir umgekehrt

$$(11.)\begin{cases} a_{n,0} = A_{n,1} \\ a_{n,1} = A_{n,2} - \binom{n-1}{1} A_{n,1} \\ a_{n,2} = A_{n,3} - \binom{n-2}{1} A_{n,2} + \binom{n+1}{1} A_{n,1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,n-1} = A_{n,n} - \binom{1}{1} A_{n,n-1} + \binom{2}{2} A_{n,n-2} \cdots \\ \qquad\qquad \cdots (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} A_{n,1} \end{cases}$$

oder

$$(11.^1) \qquad a_{n,s} = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{n-s+k+1}{k} \; A_{n,\,s-k+1}$$

Substituieren wir in (10.[1]) für die $a_{n,k}$ ihre Ausdrücke aus (6.), so erhalten wir

$$A_{n,s} = 1^n \cdot \left\{ \binom{n+1}{0}\binom{n-1}{s-1} - \binom{n+1}{1}\binom{n-2}{s-2} \cdot \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \cdot (-1)^{s-1} \cdot \binom{n+1}{s-1}\binom{n-s}{0} \right\} +$$
$$+ 2^n \cdot \left\{ \binom{n+1}{0}\binom{n-2}{s-2} - \binom{n+1}{1}\binom{n-3}{s-3} \cdot \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \cdot (-1)^{n-2} \cdot \binom{n+1}{s-2}\binom{n-s}{0} \right\} +$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ (s-1)^n \cdot \left\{ \binom{n+1}{0}\binom{n-s+1}{1} - \binom{n+1}{1}\binom{n-s}{0} \right\} +$$
$$+ s^n \cdot \binom{n+1}{0}\binom{n-s}{0}.$$

oder

$$A_{n,s} = \sum_{k=1}^{s} k^n \cdot \sum_{r=0}^{s-k} (-1)^r \cdot \binom{n+1}{r}\binom{n-k-r}{s-k-r} =$$
$$= \sum_{k=0}^{s-1} (s-k)^n \cdot \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \cdot \binom{n+1}{r}\binom{n-s+k-r}{k-r}.$$

Der Coeffizient von $(s-k)^n$ ist hier gleich $(-1)^k$. Coeffizient von x^k im Produkte $(1+x)^{n+1} \cdot (1+x)^{-(n-s+1)}$, also

$$= (-1)^k \cdot \binom{s}{k}, \text{ d. h.:}$$

$$\binom{n+1}{0}\binom{n-s+k}{k} - \binom{n+1}{1}\binom{n-s+k-1}{k-1} + \binom{n+1}{2}\binom{n-s+k-2}{k-2} \cdot \cdot$$
$$(\beta.) \qquad \cdot \cdot (-1)^k \cdot \binom{n+1}{k}\binom{n-s}{0} = (-1)^k \cdot \binom{s}{k},$$

oder

$$(\beta.') \quad \binom{n-s}{0}\binom{n+1}{k} - \binom{n-s+1}{1}\binom{n+1}{k-1} + \binom{n-s+2}{2}\binom{n+1}{k-2} \cdot \cdot$$

$$\ldots (-1)^k \binom{n-s+k}{k} \binom{n+1}{0} = \binom{s}{k}.$$

Wir bekommen somit

$$(12.) \qquad A_{n,s} = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k \cdot \binom{s}{k} (s-k)^n ,$$

oder auch

$$(12.') \qquad A_{n,s} = (-1)^s \cdot \sum_{k=1}^{s} (-1)^k \cdot \binom{s}{k} \cdot k^n .$$

d. h.:

$$(12.'') \begin{cases} A_{n,1} = 1^n \\ A_{n,2} = 2^n - \binom{2}{1} 1^n \\ A_{n,3} = 3^n - \binom{3}{1} 2^n + \binom{3}{2} 1^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n,n} = n^n - \binom{n}{1} (n-1)^n + \binom{n}{2} (n-2)^n \ldots \\ \qquad \ldots - 1^{n-1} \binom{n}{n-1} \cdot 1^n . \end{cases}$$

und infolge der Relation (9) ist

$$A_{n,n} = n!$$

Da in (u) linker Hand der Nenner um zwei Grade höher als der Zähler ist, also rechts ein Term $\frac{A_{n,0}}{1-x}$ nicht auftreten kann, so haben wir zu setzen

$$(13.) \qquad A_{n,0} = 0.$$

Wenn ferner im Ausdruck (10') von $A_{n,s}$ der zweite Index s grösser als n wird, so werden rechter Hand sämtliche Terme null. Somit haben wir

$$(14.) \quad 0 = A_{n,n+k+1} =$$

$$= \binom{n+k+1}{0} (n+k+1)^n - \binom{n+k+1}{1} (n+k)^n +$$

$$+ \binom{n+k+1}{2} (n+k-1)^n \ldots (-1)^{n+k} \binom{n+k+1}{n+k} \cdot 1^n .$$

wenn k irgend eine positive ganze Zahl inklusive null darstellt. —

Oder

$$(14.') \qquad \sum_{r=1}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} \cdot r^n = 0, \text{ wenn } m > n.$$

Zufolge der Relation (2) haben wir

$$\sum_{s=1}^{n} (-1)^s \cdot A_{n,s} \cdot (1-x)^{-s-1} = -\frac{d}{dx} \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^s \cdot A_{n-1,s} \cdot x\,(1-x)^{-s-1}$$

Schreiben wir rechts den ersten variabeln Faktor $x = 1 - (1 - x)$, so wird die rechte Seite

$$-\frac{d}{dx} \sum_{s=1}^{n=1} (-1)^s \cdot A_{n-1,s} \cdot \left\{ (1-x)^{-s-1} - (1-x)^{-s} \right\},$$

oder wenn wir in der ersten Summe $s - 1$ an die Stelle von s setzen, so haben wir, da $A_{n-1,0} = 0$ und $A_{n-1,n} = 0$ ist:

$$\frac{d}{dx} \sum_{s=1}^{n} (-1)^s \cdot \left\{ A_{n-1,s-1} + A_{n-1,s} \right\} \cdot (1-x)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^s \cdot s\,(A_{n-1,s-1} + A_{n-1,s})\,(1-x)^{-s-1}.$$

Wir erhalten also für die Coeffizienten $A_{n,s}$ die Relation

$$(15.) \qquad A_{n,s} = s \cdot (A_{n-1,s} + A_{n-1,s-1}).$$

Wir behaupten aber, es sei $A_{n,s}$ durch $s!$ teilbar. In der That, setzen wir $A_{n,s} = s!\, c_{n,s}$, so giebt (15)

$$c_{n,s} = s \cdot c_{n-1,s} + c_{n-1,s-1}.$$

Aber $c_{n,0} = 0$ und $c_{n,1} = 1$ und somit werden die Grössen $c_{n,s}$ sämtlich ganze Zahlen sein, w. z. z.

Wir haben daher

$$(16.) \quad s^n - \binom{s}{1}(s-1)^n + \binom{s}{2}(s-2)^n \ldots (-1)^{s-1} \cdot \binom{s}{s-1} 1^n \equiv 0 \pmod{s!}, \text{ wenn } s \leqq n$$
$$= 0 \qquad\qquad , \text{ wenn } s > n.$$

Wenn wir in der Identität

$$1 + 2^n x + 3^n x^2 + 4^n x^3 + \ldots \text{ in inf.} = \frac{a_{n,0} + a_{n,1} x \ldots a_{n,n-1} x^{n-1}}{(1-x)^{n+1}}$$

die rechte Seite nach Potenzen von x entwickeln, und die Coefficienten derselben Potenzen auf beiden Seiten einander gleich setzen, so erhalten wir

(17.) $$(s+1)^n =$$

$$= \binom{n+s}{s} a_{n,0} + \binom{n+s-1}{s-1} a_{n,1} + \binom{n+s-2}{s-2} a_{n,2} \cdots + \binom{n}{0} . a_{n,s}.$$

Wenn $s \geqq n$, so bricht die rechte Seite in (17) nach dem Gliede $\binom{s+1}{s-n+1} a_{n,n-1}$ ab.

Verfahren wir auf dieselbe Weise mit der Identität

$$1 + 2^n x + 3^n x^2 + 4^n x^3 + \ldots \text{ in inf.} =$$

$$= (-1)^{n+1} \left\{ \frac{A_{n,1}}{(1-x)^2} - \frac{A_{n,2}}{(1-x)^3} + \frac{A_{n,3}}{(1-x)^4} \cdots (-1)^{n+1} \frac{A_{n,n}}{(1-x)^{n+1}} \right\}.$$

so kommt

(18.) $$(-1)^{n+1} . (s+1)^n =$$

$$= \binom{s+1}{1} A_{n,1} - \binom{s+2}{2} A_{n,2} + \binom{s+3}{3} A_{n,3} \cdots + (-1)^{n+1} \binom{s+n}{n} A_{n,n}.$$

Mittelst der Relationen (10) oder (11) gehen die rechten Seiten in (17) und (18) auch direkt in einander über.

§ 4. Die Ausdrücke (17) und (18) führen auf mehrfache independente Darstellungen der *Bernoullischen Zahlen*. In der That aus (17) folgt

$$\sum_{s=1}^{k} s^n = \sum_{r=0}^{n-1} a_{n,r} \cdot \left\{ \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} \cdots + \binom{n+k-r-1}{k-r-1} \right\}$$

und aus (18)

$$\sum_{s=1}^{k} s^n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} . A_{n,r} \left\{ \binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \binom{r+2}{2} \cdots + \binom{r+k-1}{k-1} \right\}.$$

In diesen Summen ist der Coeffizient von $a_{n,r}$ gleich demjenigen von x^{k-r-1} im Produkte $(1-x)^{-1} . (1-x)^{-n-1}$, also $= \binom{n+k-r}{k-r-1} =$

$\binom{n+k-r}{n+1}$, und der Coeffizient von $(-1)^{n-r} \cdot A_{n,r}$ ist gleich demjenigen von x^{k-1} im Produkte $(1-x)^{-1} \cdot (1-x)^{-r-1}$, also $= \binom{r+k}{k-1}$ $= \binom{r+k}{r+1}$.

Wir gewinnen somit die beiden Resultate

(19.) $$1^n + 2^n + 3^n \cdots + k^n =$$
$$= \binom{n+k}{n+1} a_{n,0} + \binom{n+k-1}{n+1} a_{n,1} + \binom{n+k-2}{n+1} a_{n,2} \cdots + \binom{k+1}{n+1} a_{n,n-1}$$

und

(20.) $$1^n + 2^n + 3^n \cdots + k^n =$$
$$= \binom{n+k}{n+1} A_{n,n} - \binom{n+k-1}{n} A_{n,n-1} + \binom{n+k-2}{n-1} A_{n,n-2}$$
$$\cdots (-1)^{n-1} \binom{k+1}{2} A_{n,1}.$$

Anderseits hat man, wenn B_1, B_2, B_3, . . die *Bernoullischen Zahlen* darstellen,

(21.) $$1^n + 2^n + 3^n \cdots + k^n =$$
$$= \frac{k^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2} k^n +$$
$$+ \binom{n}{1} \frac{B_1}{2} \cdot k^{n-1} - \binom{n}{3} \frac{B_2}{4} \cdot k^{n-3} + \binom{n}{5} \frac{B_3}{6} \cdot k^{n-5} \cdots$$
$$+ \begin{cases} \cdots (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot \binom{n}{n-1} \cdot \frac{B_{n/2}}{n} \cdot k, & \text{wenn n gerade} \\ \cdots (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \binom{n}{n-2} \cdot \frac{B_{\frac{n-1}{2}}}{n-1} \cdot k^2, & \text{wenn n ungerade.} \end{cases}$$

Entwickeln wir also die Ausdrücke rechter Hand in den Gleichungen (19) und (20) nach Potenzen von k, so ist, vorausgesetzt, dass n grösser als 1 ist, der Coeffizient von k, je nachdem n gerade oder ungerade ist, entweder $= (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot B_{n/2}$, oder $= 0$.

Betrachten wir zuerst die Gleichung (19)

$$\sum_{s=1}^{k} s^n = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n+k-r}{n+1} a_{n,r}.$$

In der Faktoriellen

$$\binom{n+k-r}{n+1} = \frac{(k+n-r)(k+n-r-1)\cdots(k+1)\,k\,(k-1)\cdots(k-r)}{(n+1)!}$$

wird der Coefficient von k sein

$$= (-1)^r \cdot \frac{(n-r)(n-r-1)\cdots 2\cdot 1\cdot 12\cdots r}{(n+1)!} = (-1)^r \frac{(n-r)!\,r!}{(n+1)!}$$

$$= \frac{(-1)^r}{n+1} \cdot \frac{1}{\binom{n}{r}}.$$

In Gleichung (19) ist also der gesuchte Coeffizient

$$\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{a_{n,r}}{\binom{n}{r}},$$ und wir erhalten

$$(22.)\quad \frac{a_{n,0}}{\binom{n}{0}} - \frac{a_{n,1}}{\binom{n}{1}} + \frac{a_{n,2}}{\binom{n}{2}} \cdots (-1)^{n-1} \cdot \frac{a_{n,n-1}}{\binom{n}{n-1}} =$$

$$\begin{cases} = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot (n+1) \cdot B_{n/2}, & \text{wenn n gerade und} > 0 \\ = 0 & \text{, wenn n ungerade und} > 1. \end{cases}$$

Oder da $a_{n,n-s} = a_{n,s-1}$, so erhalten wir auch, wenn wir (22) mit $(-1)^{n-1}$ multiplizieren:

$$(23.)\quad \frac{a_{n,0}}{\binom{n}{1}} - \frac{a_{n,1}}{\binom{n}{2}} + \frac{a_{n,2}}{\binom{n}{3}} \cdots (-1)^{n-1} \frac{a_{n,n-1}}{\binom{n}{n}} =$$

$$\begin{cases} = (-1)^{n/2} \cdot (n+1)\, B_{n/2}, & \text{wenn n gerade und} > 0 \\ = 0 & \text{, wenn n ungerade und} > 1. \end{cases}$$

Ersetzen wir in (22) $a_{n,s}$ gemäss der Relation (4) durch $(s+1)\,a_{n-1,s} + (n-s)\,a_{n-1,s-1}$, so kömmt

$$(24.)\quad \frac{a_{n-1,0}}{\binom{n}{1}} - \frac{a_{n-1,1}}{\binom{n}{2}} + \frac{a_{n-1,2}}{\binom{n}{3}} \cdots (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1,\,n-2}}{\binom{n}{n-1}} =$$

$$\begin{cases} = (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot (n+1) \cdot B_{n/2}, & \text{wenn n gerade und } > 0, \\ = 0 & \text{, wenn n ungerade und } > 1. \end{cases}$$

Die Formeln (22) und (23) stellen die Bernoullischen Zahlen durch die $a_{n,s}$ mit geraden Indices n, die Formel (24) durch die $a_{n,s}$ mit ungeraden Indices n dar. Die Coefficienten $a_{n,s}$ sind durch die Formeln (6) und durch die Rekursionsgleichung (4) gegeben.

Betrachten wir endlich die Gleichung (20)

$\sum_{s=1}^{k} s^n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \cdot \binom{k+r}{r+1} \cdot A_{n,r}$. In der Faktoriellen $\binom{k+r}{r+1} = \frac{(k+r)(k+r-1)\ldots(k+1)\,k}{(r+1)!}$ ist der Faktor von k gleich $\frac{r!}{(r+1)!} = \frac{1}{r+1}$. Wir erhalten somit aus (21)

$$(25.)\quad \frac{A_{n,1}}{2} - \frac{A_{n,2}}{3} + \frac{A_{n,3}}{4} \cdots (-1)^{n+1} \cdot \frac{A_{n,n}}{n+1} =$$

$$\begin{cases} = (-1)^{n/2} \cdot B_{n/2}, & \text{wenn n gerade und } > 0, \\ = 0 & \text{, wenn n ungerade und } > 1. \end{cases}$$

Setzen wir hier gemäss (15) $A_{n,s} = s\,(A_{n-1,s} + A_{n-1,s-1})$, so kommt

$$(26.)\quad \frac{A_{n-1,1}}{2 \cdot 3} - \frac{A_{n-1,2}}{3 \cdot 4} + \frac{A_{n-1,3}}{4 \cdot 5} \cdots (-1)^n \cdot \frac{A_{n-1,\,n-1}}{n\,(n+1)} =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot B_{n/2}, & \text{wenn n gerade und } > 0, \\ 0 & \text{, wenn n ungerade und } > 1. \end{cases}$$

In (25) sind die Bernoullischen Zahlen durch die $A_{n,s}$ mit geraden Indices n, in (26) durch die $A_{n,s}$ mit ungeraden Indices n dargestellt. Die Coeffizienten $A_{n,s}$ sind durch die Formeln (12) und durch die Rekursionsgleichung (15) gegeben.

§ 5. *Der Clausen-Staudt'sche Satz.* Wir hatten in (25) die n^{te} Bernoullische Zahl B_n dargestellt durch

$$(-1)^n \cdot B_n = \sum_{s=1}^{2n} (-1)^{s+1} \cdot \frac{A_{2n,s}}{s+1},$$

wo $A_{n,s} = (-1)^s \cdot \sum_{r=1}^{s} (-1)^r \cdot \binom{s}{r} r^n$ und $A_{n,s} \equiv 0 \pmod{s!}$.

Untersuchen wir jetzt $A_{2n,s}$ auf die Teilbarkeit durch $s+1$.

a) Wenn *$s+1$ in zwei ungleiche Faktoren zerlegbar*, $s+1 = a \cdot b$, wo $a > b > 1$, so sind sowohl a als b kleiner als $s+1$, und daher findet sich jeder dieser Faktoren in $s!$ Dann ist also $\frac{A_{2n,s}}{s+1}$ eine *ganze Zahl.*

b) Wenn *$s+1 = p^2$, wo p eine Primzahl,* so behaupten wir, dass wiederum $\frac{A_{2n,s}}{s+1}$ eine *ganze Zahl.*

Denn wenn zunächst $p = 2$, so ist zwar $\frac{s!}{s+1} = \frac{3!}{4} = \frac{3}{2}$, aber dann ist $\frac{A_{2n,s}}{s+1} = \frac{3 - 3 \cdot 2^{2n} + 3^{2n}}{4}$. Nun ist $3 + 3^{2n} \pmod 4$ $\equiv -1 + (-1)^{2n} \equiv 0$, und daher $\frac{A_{2n,s}}{s+1}$ eine ganze Zahl, w. z. z.

Wenn aber $p > 2$, so betrachten wir $\frac{s!}{s+1} = \frac{1.2.3 \ldots (p^2-1)}{p^2}$

Wenn nun $p > 2$, so ist $p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \geqq 2p$. Im Produkte $s!$ treten daher sowohl p als $2p$ als Faktoren auf, und daher ist $\frac{s!}{s+1}$ ganz und somit auch $\frac{A_{2n,s}}{s+1}$ eine ganze Zahl wie z. z.

c) Sei nun *$s+1 = p$, wo p eine Primzahl.*

Wenn zunächst $s+1 = 2$, so ist im Ausdruck von $(-1)^n \cdot B_n$ das betreffende Glied $\frac{A_{2n,1}}{2} = \frac{1}{2}$.

Sei endlich $s+1 = p$, wo p eine ungerade Primzahl. Im Ausdruck von $(-1)^n \cdot B_n$ ist der betreffende Term

$$-\frac{A_{2n,s}}{s+1} = \sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \frac{\binom{s}{r} \cdot r^{2n}}{s+1}.$$

Von den hier auftretenden Grössen r ist keine durch die Primzahl $s + 1 = p$ teilbar. Wir haben jetzt die Fälle zu unterscheiden, wo $2n$ durch s teilbar und wo $2n$ nicht durch s teilbar.

Betrachten wir erst den Fall, wo $2n$ nicht durch s teilbar. Es sei denn $2n \equiv a \pmod{s}$, wo $0 < a < s$, also $2n = k\,s + a = k\,(p-1) + a$, wo k eine ganze Zahl, oder

$$r^{2n} = r^{k(p-1)+a}.$$

Da nun r durch p nicht teilbar, so ist nach dem Fermat'schen Satze $r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, und daher

$$r^{2n} \equiv r^{a} \pmod{p}.$$

Somit modulo p

$$\sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \binom{s}{r} \cdot r^{2n} \equiv \sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \binom{s}{r} r^{a}.$$

Aber, da hier $s > a$, so ist gemäss der Relation (14′) der Ausdruck rechter Hand identisch $= 0$. Also ist nun

$\sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \binom{s}{r} \cdot r^{2n}$ durch $p = s + 1$ teilbar und somit ist jetzt

$\frac{A_{2n,\,s}}{s+1}$ eine *ganze Zahl*.

Geht aber $s = p - 1$ in $2n$ auf, oder ist $2n = k \,.\, s$, wo k eine ganze Zahl, so haben wir $r^{2n} = r^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$.

Also modulo $p = s + 1$ ist jetzt

$$\sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \binom{s}{r} \cdot r^{2n} \equiv \sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \binom{s}{r} = 1 - (1-1)^{s} = 1,$$

d. h. im Ausdruck von $(-1)^{n} \,.\, B_n$ ist der betreffende Term

$$-\frac{A_{2n,\,p-1}}{p} = \frac{1}{p} + \text{ganze Zahl}.$$

Alles zusammengefasst erhalten wir also

$$(-1)^{n} \cdot B_n = \left(\frac{1}{2} + \sum \frac{1}{p}\right) + \text{Ganze Zahl},$$

wo die Summe rechter Hand sich auf alle diejenigen ungeraden Primzahlen p bezieht, für welche $p-1$ ein Teiler von $2n$ ist. Oder da auch 2 eine Primzahl, und $2-1$ stets ein Teiler von $2n$ ist, so können wir schreiben

(27.) $$B_n = \text{Ganze Zahl} + (-1)^n \cdot \left\{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \cdots + \frac{1}{\lambda}\right\},$$

wo $\alpha, \beta \ldots \lambda$ alle diejenigen Primzahlen darstellen, für welche $\alpha-1$, $\beta-1, \ldots \lambda-1$ Teiler von $2n$ sind. Dies ist der *Clausen-Staudt'sche Satz*.

Z. B.:

2 | Teiler 1, 2
| Primzahlen . . 2, 3

$$B_1 = \frac{1}{6} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

4 | Teiler 1, 2, 4
| Primzahlen . . . 2, 3, 5

$$B_2 = \frac{1}{30} = -1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right).$$

6 | Teiler 1, 2, 3, 6
| Primzahlen . . . 2, 3, 7

$$B_3 = \frac{1}{42} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right).$$

8 | Teiler 1, 2, 4, 8
| Primzahlen . . . 2, 3, 5

$$B_4 = \frac{1}{30} = -1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right).$$

10 | Teiler 1, 2, 5, 10
| Primzahlen . . . 2, 3, 11

$$B_5 = \frac{5}{66} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11}\right).$$

12 | Teiler 1, 2, 3, 4, 6, 12
| Primzahlen . . . 2, 3, 5, 7, 13

$$B_6 = \frac{691}{2730} = -1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13}\right).$$

14 | Teiler 1, 2, 7, 14
Primzahlen . . . 2, 3

$$B_7 = \frac{7}{6} = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

16 | Teiler 1, 2, 4, 8, 16
Primzahlen . . . 2, 3, 5, 17

$$B_8 = \frac{3617}{510} = 6 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17}\right).$$

18 | Teiler 1, 2, 3, 6, 9, 18
Primzahlen . . . 2, 3, 7, 19

$$B_9 = \frac{43867}{798} = 56 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{19}\right).$$

20 | Teiler 1, 2, 4, 5, 10, 20
Primzahlen . . . 2, 3, 5, 11

$$B_{10} = \frac{174\,611}{330} = 528 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11}\right).$$

22 | Teiler 1, 2, 11, 22
Primzahlen . . . 2, 3, 23

$$B_{11} = \frac{854\,513}{138} = 6193 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{23}\right).$$

24 | Teiler 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
Primzahlen . . . 2, 3, 5, 7, 13

$$B_{12} = \frac{236\,364\,091}{2730} = 86\,579 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13}\right).$$

u. s. w.

Dieser Satz ward zuerst von Thomas Clausen in den «Astronomischen Nachrichten», Bd. VII, Nr. 406 (1840, Juli 23) ohne Beweis mitgeteilt, und von Georg Karl Christian v. Staudt im «Crelle'schen Journal» Bd. XXI, p. 372 und f. (1840, Aug. 16.) bewiesen. Um den Beweis für die Bernoullische Zahl der n^{ten} Ordnung zu leisten, muss Staudt voraussetzen, dass der Satz für alle niedrigeren Ordnungen

schon bewiesen sei. Herr Louis Saalschütz in seinen «Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, Berlin 1893», p. 132 und f. reproduziert im wesentlichen den Staudt'schen Beweis. Eine direkte Herleitung, die mit der obigen Analogie hat, aber einen andern Ausgangspunkt nimmt, giebt Herr K. Schering: «Zur Theorie der Bernoullischen Zahlen». Mathemat. Annalen. Bd. 52 (1899), p. 171 und f.

(Siehe Tabellen Rückseite.)

Werte von $a_{n,s} = (s+1) \cdot a_{n-1,s} + (n-s) \cdot a_{n-1,s-1}$.

s =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	usw.
n = 1	1										
2	1	1									
3	1	4	1								
4	1	11	11	1							
5	1	26	66	26	1						
6	1	57	302	302	57	1					
7	1	120	1 191	2 416	1 191	120	1				
8	1	247	4 293	15 619	15 619	4 293	247	1			
9	1	502	14 608	88 234	156 190	88 234	14 608	502	1		
10	1	1 013	47 840	455 192	1 310 354	1 310 354	455 192	47 840	1 013	1	
.											
.				u. s. w.							

Die Summe jeder horizontalen Zeile ist = n!

Werte von $A_{n,s} = s!\, c_{n,s}$, wo $c_{n,s} = s \cdot c_{n-1,s} + c_{n-1,s-1}$.

s =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
n = 1	1												
2	1	2!1											
3	1	2!3	3!1										
4	1	2!7	3!6	4!1									
5	1	2!15	3!25	4!10	5!1								
6	1	2!31	3!90	4!65	5!15	6!1							
7	1	2!63	3!301	4!350	5!140	6!21	7!1						
8	1	2!127	3!966	4!1701	5!1050	6!266	7!28	8!1					
9	1	2!255	3!3025	4!7770	5!6951	6!2646	7!462	8!36	9!1				
10	1	2!511	3!9330	4!34105	5!42525	6!22827	7!5880	8!750	9!45	10!1			
11	1	2!1023	3!28501	4!145750	5!246730	6!179487	7!63987	8!11880	9!1155	10!55	11!1		
12	1	2!2047	3!86526	4!611501	5!1379400	6!1323652	7!627396	8!159027	9!22275	10!1705	11!66	12!1	
.													
.													
.													

u. s. w.

Die Grössen $c_{s+k,\,s}$, wo s die Werte 1, 2, 3, 4, 5 . . . in inf. durchläuft, und k konstant bleibt, bilden eine arithmetische Reihe der Ordnung 2 k, wo die konstante Differenz der (2 k) Ordnung $= 1 . 3 . 5 \ldots (2\,k-1)$ ist.

Z. B.

s =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	.	. .
$c_{s+1,\,s}$ =	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	.	. .
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
			1	1	1	1	1	1	1	1	1		

s =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	.	.
$c_{s+2,\,s}$ =	1	7	25	65	140	266	462	750	1155	1705	2431	.	.
		6	18	40	75	126	196	288	405	550	726		
			12	22	35	51	70	92	117	145	176		
				10	13	16	19	22	25	28	31		
					3	3	3	3	3	3	3		

s =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	.	.
$c_{s+3,\,s}$ =	1	15	90	350	1050	2646	5880	11880	22275	39325	66066	.	.
		14	75	260	700	1596	3234	6000	10395	17050	26741		
			61	185	440	896	1638	2766	4395	6655	9691		
				124	255	456	742	1128	1629	2260	3036		
					131	201	286	386	501	631	776		
						70	85	100	115	130	145		
							15	15	15	15	15		

s =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	.	.
$c_{s+4,\,s}$ =	1	31	301	1701	6951	22827	63987	159027	359502	752752	1479478	.	.
		30	270	1400	5250	15876	41160	95040	200475	393350	726726		
			240	1130	3850	10626	25284	53880	105435	192775	333476		
				890	2720	6776	14658	28596	51555	87340	140701		
					1830	4056	7882	13938	22959	35785	53361		
						2226	3826	6056	9021	12826	17576		
							1600	2230	2965	3805	4750		
								630	735	840	945		
									105	105	105		

e. s. w.

Albert Bentelí.

Die Niveauschwankungen der 13 grösseren Schweizerseen

im Zeitraume der 31 Jahre 1867 bis und mit 1897 mit besonderer Berücksichtigung der Jura-Seen vor und nach der Juragewässer-Correction.

(Vorgetragen am 10. Juni 1899.)

Schon im Jahre 1888 hatte ich in einer Sitzung der bern. Naturforschenden Gesellschaft einen Vortrag über die Niveauschwankungen der 13 grösseren Schweizerseen gehalten. Damals stand mir für die meisten Seen das Beobachtungsmaterial von 20 Jahren, 1867 bis 1886 zur Verfügung. Für 11 weitere Jahre habe ich seither Steigen und Fallen der Seeoberflächen addiert und bin nun im Falle, die Ergebnisse der zwei Perioden 1867—1886 und 1887—1897 zu vergleichen und auch Mitteilungen zu bringen über die mittleren Verhältnisse der ganzen Periode von 31 Jahren 1867—1897. Zudem werde ich im Stande sein, Ihnen ein Bild zu geben von den sehr bedeutenden Veränderungen in der Beweglichkeit der Niveaux der drei Juraseen, herbeigeführt durch das grossartige, nach dem Projekte La Nicca ausgeführte Werk der Juragewässer-Correction.

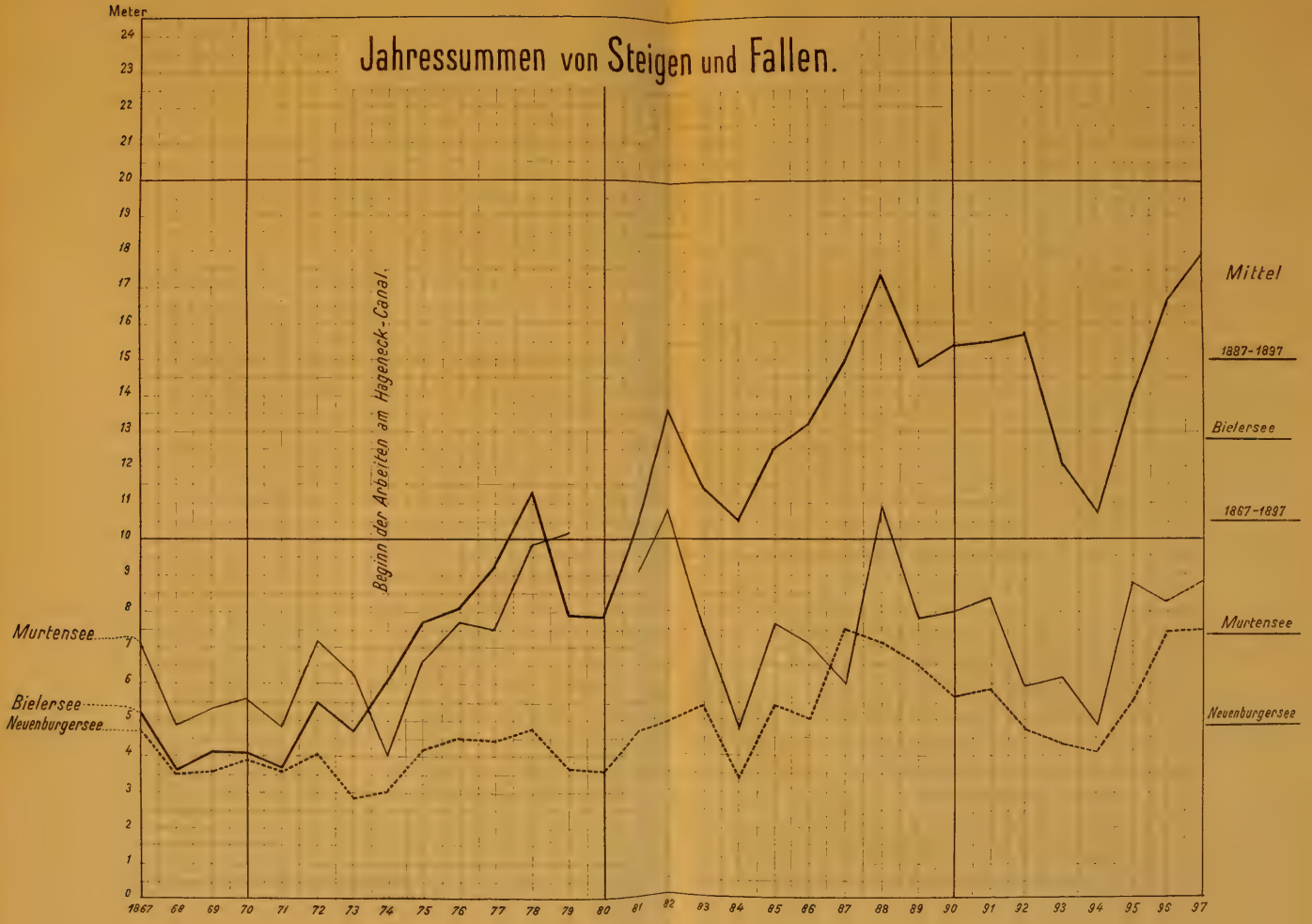
Zunächst möchte ich Ihnen mitteilen, auf welches Beobachtungsmaterial ich mich stützen konnte. In den 60er Jahren hat die hydrometrische Kommission der schweiz. Naturforschenden Gesellschaft das Pegelbeobachtungswesen der verschiedenen Kantone in ein einheitliches System gebracht und 1867 angefangen, die Wasserstandsbeobachtungen der bedeutenderen Flüsse und Seen in graphischen Jahresbulletins zu veröffentlichen. Der Umfang dieser Arbeiten nahm sehr rasch zu, man sah überall deren praktischen Wert ein, und schon nach wenigen Jahren zog der Bund diese Arbeiten an sich und teilte dieselben dem Geschäftskreise des eidgen. Oberbauinspektorats zu. Bald sah sich der Ober-Bauinspektor gezwungen, mit der Hydrometrie ein eigenes Bureau zu beschäftigen und Herrn Ingenieur

Epper die Leitung desselben zu übertragen. Herr Epper steht heute noch an der Spitze dieser Abteilung und vermag mit 11 Angestellten die in den letzten Jahren so sehr angewachsene Arbeit kaum zu bewältigen. Es gereicht mir zur besonderen Freude, Ihnen sagen zu können, dass man an die Stelle des Leiters des hydrom. Bureaus kaum einen tüchtigeren Mann hätte wählen können, denn die von diesem Bureau herausgegebenen Arbeiten zeugen von seltenem Fleisse und von sehr ernster Behandlung des ganzen Beobachtungs- und Bearbeitungswesens. Sie werden sich übrigens selber davon überzeugen können. Wir wollen hier kurz eine Uebersicht der Arbeiten geben, mit denen das hydrometrische Bureau sich beschäftigt. Dieselben zerfallen in zwei Teile:

A. Die Wasserstandsbeobachtungen und deren Publikationen.
B. Untersuchung der Wasserverhältnisse.
   a) Genaue Erforschung der Einzugsgebietsgrenzen (Wasserscheiden); die Höhenstufen der Gebiete und Bestimmung ihrer Oberflächen.
   b) Publikationen. Genaue Beschreibung und Situationspläne der Pegelstationen, der Einzugsgebiete (Fels-, Firn- und Gletscher-Anteile etc.), Höhenversicherung, Durchflussprofile.
   c) Längenprofile der fliessenden Gewässer.
   d) Minimalwassermengen. Für einzelne Hauptstationen mittlere und höchste Durchflussmengen. Abflusskurven.

Man wird leicht begreifen, dass Herr Epper dieses kolossale Programm mit seinem Bureau kaum zu bewältigen vermag.

Vor 11 Jahren hatte ich die Niveau-Schwankungen der 13 grösseren Schweizerseen während der 20 Jahre 1867 bis und mit 1886 vergleichend zusammengestellt und auf einige bemerkenswerte Verhältnisse aufmerksam gemacht. Diese Arbeit habe ich fortgesetzt und für die weiteren 11 Jahre 1887 bis und mit 1897 durchgeführt. Den jährlich erscheinenden graphischen Wasserstandsbulletins entnahm ich für die 13 Seen, Bodensee, Brienzersee, Thunersee, Murtensee, Neuenburgersee, Bielersee, Vierwaldstättersee, Zugersee, Wallenstattersee, Zürichsee, Genfersee, Lago di Lugano und Lago Maggiore (geordnet nach den Flussgebieten des Rheins, der Aare, Reuss, Limmat, Rhone und Tessin) durch graphische Addition mit Zirkel die Summen von Steigen und Fallen.


Jahressummen von Steigen und Fallen.
Meter
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
Beginn der Arbeiten am Hageneck-Canal.
Mittel
1887-1897
Bielersee
1867-1897
Murtensee
Murtensee
Bielersee
Neuenburgersee
Neuenburgersee
1867 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97

Tafel I enthält diese Summen von Jahr zu Jahr von 1867 bis und mit 1897, ebenso die Summen von Steigen und Fallen während der ganzen Beobachtungszeit und die mittleren jährlichen Summen h, die Amplituden der Jahressummen und endlich die mittleren jährlichen Summen h für die Perioden 1867—1886 und 1887—1897.

Vergleichen wir nun zunächst diese letzteren Resultate.

See	Mittlere jährliche Summen von Steigen und Fallen in der Periode:		Differenz
	1867—1886	1887—1897	
	Meter	Meter	Meter
1. Bodensee	7.02	7.12	+ 0. 10
2. Brienzersee	9.65	9.28	— 0.37
3. Thunersee	9.62	8.71	— 0.91
4. Murtensee	7.06	7.62	+ 0.56
5. Neuenburgersee . .	4.15	6.00	+ 1.85
6. Bielersee	8.03	15.03	+ 7.00
7. Vierwaldstättersee . .	7.33	6.17	— 1.16
8. Zugersee	3.52	2.91	— 0.61
9. Wallenstattersee . .	14.80	14.05	— 0.75
10. Zürichsee	6.42	5.73	— 0.69
11. Genfersee	5.44	4.62	— 0.82
12. Lago di Lugano . .	7.14	6.97	— 0.17
13. Lago Maggiore . . .	14.85	13.84	— 1.01

Es zeigt sich da zunächst, dass die jährlichen Summen von Steigen und Fallen in den beiden Perioden, abgesehen vom Neuenburger- und Bielersee, nicht erheblich von einander abweichen, es können somit die mittleren jährlichen Summen h von Steigen und Fallen (in Tafel I angegeben), berechnet für die ganze Periode der 31 Jahre 1867—1897 beinahe für alle Seen als Mittelwerte für einen wohl noch grösseren Zeitabschnitt als nur für 31 Jahre betrachtet werden. Die grossen Abweichungen der mittleren Schwankungssummen h der zwei Juraseen (Neuenburger- und Bielersee) in der Periode 1887—1897 rühren jedenfalls her vom Einflusse der Juragewässerkorrektion, die während der ersten Periode 1867—1886 zur beinahe vollständigen Durchführung gekommen ist. Die mittleren Summen des jährlichen Steigens und Fallens der drei Juraseen sind

grösser geworden, während bei allen anderen Seen, ausgenommen Bodensee, diese mittlere Summe in der Periode 1887—1897 geringer war als früher (vide beigegebene graphische Uebersicht). Beim Bodensee ist die mittlere jährliche Summe von Steigen und Fallen, also die Beweglichkeit der Seeoberfläche, in der Periode 1887—1897 um 0,1 m grösser gewesen als früher. Dies rührt wohl von dem Einfluss verschiedener Korrektionen im Rheingebiete her. Im Bündnerlande hat man Wildbachverbauungen vorgenommen und den Rhein in den tiefer liegenden Gegenden besser eingedämmt, so dass die Hochwasser, die früher oft überfielen, nun rascher dem Bodensee zuströmen. Nach der vollständigen Durchführung der Rheinkorrektion wird ohne Zweifel die Beweglichkeit des Niveaus im Bodensee noch erheblich zunehmen.

Die jährlichen Summen von Steigen und Fallen sind für die 13 Seen sehr verschieden gross und auch durch die ganze Periode der 31 Jahre 1867—1897 hindurch zeigen sich bedeutende Verschiedenheiten, die hauptsächlich von den Schwankungen der Niederschlagsverhältnisse in den Seeeinzugsgebieten herrühren mögen, da ja die übrigen auf Steigen und Fallen eines Seeniveaus Einfluss ausübenden Faktoren ziemlich konstant sind.

Die grösste Beweglichkeit des Niveaus zeigen der Wallenstattersee und der Lago Maggiore. Die mittlere jährliche Summe von Steigen und Fallen beträgt für den ersteren h = 14.53 m und für den letzteren h = 14.48 m. Für den Bielersee ist h = 10.51 m, aber seit Vollendung der Juragewässerkorrektion ist das Schwanken des Niveaus noch bedeutender geworden als dasjenige der ersterwähnten Seen, das Mittel beträgt in der Periode 1887—1897 sogar 15.03 m, während dasselbe vor der Juragewässerkorrektion nur 4.1 m war. Ziemlich gleich sind die Schwankungsverhältnisse des Brienzersees, h = 9.50 m und des Thunersees, 9.24 m, etwas kleiner ist h für den Bodensee, 7.06 m, für den Murtensee 7.27 m, Vierwaldstättersee 6.92 m, Zürichsee 6.18 m und für den Lago di Lugano 7.08 m. Am geringsten finden wir die mittlere Summe h von Steigen und Fallen beim Neuenburgersee, h = 4.81 m, beim Genfersee h = 5.15 m und beim Zugersee h = 3.31 m. Für den Neuenburgersee haben sich die Schwankungsverhältnisse seit Durchführung der Juragewässerkorrektion ziemlich erheblich verändert, da sein Niveau durch den Bielersee bei hohen Aare-Anschwellungen

wesentlich aufgestaut wird. Den 4. September 1881 z. B. stand das Niveau des Bielersees um 0,66 m höher als dasjenige des Neuenburgersees, so dass ein Abfluss vom Bielersee nach oben und unten stattfinden musste. Die mittlere jährliche Summe von Steigen und Fallen betrug für den Neuenburgersee in der Periode 1867—1886 : h = 4,15 m, und in der Periode 1887—1897 stieg sie auf 6.00 Meter.

Die grösste Summe von Steigen und Fallen in einem Jahre weist der Lago Maggiore auf und zwar im Jahre 1872, sie betrug damals 31.2 m. Ueberhaupt ist die Veränderlichkeit der Schwankungen dieses Sees am bedeutendsten, die jährliche Summe von Steigen und Fallen variiert zwischen 6.6 m (1870) und 31.2 m (1872), also Amplitude = 24.6 m im Zeitraume der 31 Jahre 1867—1897. Der Columne der Amplituden entnehmen wir ferner, dass die Schwankungen am regelmässigsten sich einstellen bei den 6 Seen : Bodensee, Thunersee, Neuenburgersee, Zugersee, Zürichsee und Genfersee. Sehr unregelmässig traten die Schwankungen in der 31-jährigen Periode auf beim Bielersee, Wallenstattersee, Lago di Lugano und besonders beim Lago Maggiore. Im Jahre 1868 stieg während der Hochwasserperiode vom 16. September bis 4. Oktober, die im Rheingebiet so viel Unglück gebracht hatte, der Lago Maggiore um beinahe 7 Meter. Diese so rasche und so bedeutende Anschwellung ist vereinzelt geblieben. Kein anderer See zeigt in der ganzen Periode von 31 Jahren eine ähnliche Erscheinung, und auch beim Lago Maggiore kam seither nie wieder ein so rapides und so beträchtliches Steigen vor. Wir können uns in der Schweiz glücklich schätzen, so viele Seen zu besitzen, die den Abfluss der Gewässer so hübsch regulieren. Die grossen Steigungen der Seeniveaus sind freilich für die Uferbewohner sehr fatal, aber die Gegenden unterhalb der Seen würden weit mehr leiden unter den hohen Anschwellungen, wenn nicht die aus dem Gebirge kommenden grossen Wassermengen vor weiterem Abfluss gezwungen würden, die weiten Seebecken auszufüllen. Wie wird es wohl kommen, wenn einmal durch die unaufhörlichen Geschiebsablagerungen die Seebecken ausgefüllt sein werden! Doch, das liegt noch in sehr ferner Zeit. Die Versuche, durch Wildbachverbauungen das Geschiebe in den Bergen zurückzuhalten, werden den Seeausfüllungsprozess etwas verzögern, aber nicht aufhalten. Uebrigens könnten grosse Erdbeben inzwischen noch viel bedeutendere Veränderungen bringen.

Es ist sehr schwierig, aus den Verschiedenheiten der jährlichen Summen von Steigen und Fallen Schlüsse zu ziehen, da sehr viele und überall verschiedene Faktoren auf die Schwankungen Einfluss haben. Den grössten Einfluss auf das durchschnittliche Mass von Steigen und Fallen eines Seeniveaus hat wohl das Verhältnis der Grösse f der Seeoberfläche zur Oberfläche F des See-Einzugsgebiets. Je grösser die Seeoberfläche im Verhältnis zum Einzugsgebiet ist, desto geringer werden selbstverständlich die Schwankungen ausfallen. Dieses Verhältnis $\frac{f}{F}$ bildet für jeden See einen c o n s t a n t e n auf die Schwankungen Einfluss habenden Faktor. Infolge von Correctionen kann zwar auch dieses Verhältniss $\frac{f}{F}$ sich erheblich verändern. Folgende Tabelle zeigt solche Veränderungen für die 3 Juraseen:

	vor der Juragewässer-Correction			nach der Juragewässer-Correction		
	f	F	$\frac{f}{F}$	f	F	$\frac{f}{F}$
	km²	km²		km²	km²	
Murtensee .	27.4	778.8	0.0352	22.9	778.8	0.0294
Neuenburgersee . .	239.6	2619.6	0.0915	218.2	2619.6	0.0833
Bielersee .	42.2	3057.0	0.0138	39.4	8159.8	0.0048

Bei den übrigen Seen ist $\frac{f}{F}$ wohl so ziemlich unverändert geblieben. Es sind aber noch andere Einfluss habende Dinge als constante Faktoren zu betrachten. So die Lage des Sees zu seinem Einzugsgebiete, die Form des Sees, die Natur der Einzugsgebiete (Gletscher, Firn, Fels, verschiedene Culturarten, mehr oder weniger steile Ablaufrinnen gegen den See hin). Ausserdem haben wir an Faktoren zu denken, die der Veränderung unterworfen sind, die Verdunstungsverhältnisse, die Abflussverhältnisse und endlich die hier sehr wichtigen Niederschlagsverhältnisse, wobei besonders die Niederschlagsintensität, die durchschnittlich auf der Südseite der Alpen grösser ist als auf der Nordseite, eine bedeutende Rolle spielt. — Diese Faktoren alle sind für die 13 Seen sehr verschieden. Ein wichtiges Moment fällt beim Vergleich der Schwankungsverhältnisse der 13 Seen ins Gewicht. Seen, die alle ihre Zuflüsse direkt erhalten, erleiden natürlich grössere Schwankungen als diejenigen, deren

zufliessende Gewässer teilweise durch andere Seen reguliert worden sind. Wir teilen dementsprechend die 13 Seen in zwei Gruppen:

1. Gruppe: Bodensee, Brienzersee, Murtensee, Vierwaldstättersee, Zugersee[1]), Wallenstattersee, Genfersee und Lago di Lugano.

2. Gruppe: Thunersee, Neuenburgersee, Bielersee, Zürichsee und Lago Maggiore.

Bevor wir nun die mittleren jährlichen Summen h von Steigen und Fallen der Seeniveaus mit einander vergleichen, wollen wir diese Summen h auf die Flächen der betreffenden Seeeinzugsgebiete reducieren, d. h. für jeden See $\frac{h\,f}{F}$ berechnen.

Hierzu veranlasst uns folgende Ueberlegung:

Würde in einem Seegebiet die Seeoberfläche plötzlich doppelt so gross, so würde sich das zufliessende Wasser auf eine zweimal so grosse Fläche verteilen, also Steigen und Fallen nur halb so gross werden.

Wir bekommen demnach $h : h' = f' : f$. Würde umgekehrt für denselben See f das Einzugsgebiet F doppelt so gross, so müsste, falls die Gewässer ebenso rasch dem See zufliessen würden, das Steigen des Seeniveau's auch doppelt so gross ausfallen. es gilt also annähernd: $h : h' = F : F'$. Fassen wir zusammen, so bekommen wir: $h : h' = \frac{f'}{F'} : \frac{f}{F}$ oder $\frac{h\,.\,f}{F} = \frac{h'\,f'}{F'}$, es sollte also der Ausdruck $\frac{hf}{F}$ für alle Seen, die ihren Zufluss direkt erhalten, und bei welchen die übrigen auf Steigen und Fallen Einfluss habenden Faktoren dieselben wären, gleich ausfallen.

Für den Bielersee ist nach der Juragewässerkorrektion das Einzugsgebiet infolge Ableitung der Aare durch den Hageneckkanal nach dem Bielersee plötzlich von 3057 km² auf 8159.8 km² gestiegen. Es war demnach ein Wachsen der Grösse h in ungefähr gleichem Verhältnis zu erwarten, da ja $h : h' = F : F'$. Das ist annähernd eingetroffen, denn h war vor der Korrektion 410 cm und nach derselben 1301 cm. Das h ist nach der Korrektion sogar mehr als dreimal so gross geworden als vorher, hat also noch in bedeutenderem Masse zugenommen als das Einzugsgebiet. Dies ist leicht begreiflich. Frü-

[1]) Der Zufluss des Zugersees wird allerdings durch den Aegerisee etwas reguliert, allein das zugehörige Einzugsgebiet ist nicht sehr gross.

her waren die Schwankungen des Bielerseeniveau's der Regulierung des Zuflusses durch den Neuenburgersee wegen sehr gering. Jetzt spielt diese Regulierung gegenüber dem viel grösseren Einzugsgebiete keine so bedeutende Rolle mehr. Selbstverständlich dürfen wir annähernd gleiches $\frac{h \cdot f}{F}$ nur erwarten für diejenigen Seen, welche ihren Zufluss direkt bekommen, es sind demnach in den Tafeln II, III, IV die Verhältnisse $\frac{h \cdot f}{F}$ nach den beiden schon oben angegebenen Seegruppen getrennt berechnet worden. Tafel II hatte ich schon in meinem Vortrag anno 1888 vorgewiesen, allein sie ist nun doch etwas verändert, da seither die Seeflächen und die Flächen der Einzugsgebiete nach genaueren Karten bestimmt worden sind. Ueberdies wurden die durch die Juragewässerkorrektion verursachten Aenderungen der Seeoberflächen der 3 Juraseen berücksichtigt.

Tafel V enthält die Zusammenstellung der $\frac{h \cdot f}{F}$ für die drei Perioden: 1867 — 1886, 1887 — 1897 und 1867 — 1897. Die Schwankungsverhältnisse der Periode 1887 — 1897 weichen wenig ab von denjenigen der 20jährigen Periode 1867 — 1886, nur ist die mittlere jährliche Summe von Steigen und Fallen in der letzteren Periode beinahe für alle Seen etwas geringer ausgefallen, was wohl von den durchschnittlich geringeren Niederschlagsmengen der 2ten Periode herrühren mag. Eine markante Ausnahme macht die Zahl $\frac{h \cdot f}{F}$ des Neuenburgersees, die in der zweiten Periode bedeutend grösser geworden ist. Die Seefläche ist seit der Korrektion etwas kleiner geworden, und der Abfluss wird oft durch die Anschwellungen des Bielersees gehemmt. Das Mittel der $\frac{h \cdot f}{F}$ beträgt für die erste Seegruppe in der ersten Periode 37.5 cm, in der zweiten Periode 34.5 cm und in der ganzen Periode 36.4 cm, zeigt also geringe Veränderungen. Betrachten wir die $\frac{h \cdot f}{F}$ der ersten Seegruppe, berechnet für die ganze Periode der 31 Jahre 1867 — 1897, so sehen wir $\frac{h \cdot f}{F}$ unter dem Mittel 36.4 bei Bodensee, Brienzersee, Murtensee, Vierwaldstättersee, Wallenstattersee, und über dem Mittel bei Zugersee, Genfersee und Lago di Lugano, also ganz gleiches Verhalten wie in der

20jährigen Periode, die ich früher bearbeitet hatte. — Murtensee und Brienzersee zeigen die geringsten $\frac{h \cdot f}{F}$, nämlich 22.6 cm und 25.1 cm. Der Zufluss zum Brienzersee wird durch die ca. 19% Firn- und Gletscherfläche in seinem Einzugsgebiet einigermassen reguliert, und andererseits sind die Abflussverhältnisse ziemlich günstig. Der Murtensee empfängt aus seinem langgestreckten Einzugsgebiete von schwachem Gefälle den Zufluss nur langsam, und überdies befindet sich das Einzugsgebiet in einer Zone geringer Niederschläge. Für den Bodensee ist $\frac{h \cdot f}{F} = 30.0$. Auch hier langen die zufliessenden Gewässer aus den teilweise sehr entfernten Gebieten ziemlich langsam an. Der Wallenstattersee hat eine mittlere jährliche Summe von Steigen und Fallen von 1453 cm, die grösste aller 13 Seen, aber $\frac{h \cdot f}{F}$ beträgt nur 32.2 cm, steht also noch ziemlich unter dem Mittel 36.4. Da die Beschaffenheit des Einzugsgebiets, die bedeutenden Niederschläge in demselben und die Lage des Sees zum Einzugsgebiete eher eine grosse Beweglichkeit des Seeniveaus erklärlich erscheinen liessen, so müssen wir auf günstige Abflussverhältnisse schliessen. Vierwaldstättersee und Genfersee haben nahezu gleiches $\frac{h \cdot f}{F}$, 35.0 cm und 37.2 cm, ganz nahe dem Mittel. Bei dem Vierwaldstättersee sind fast alle Verhältnisse einem grossen Steigen und Fallen günstig, der See liegt ziemlich central zum Einzugsgebiet, die Bergabhänge sind sehr steil und die Niederschläge in der Centralschweiz sehr bedeutend, also müssen auch hier günstige Abflussverhältnisse bestehen. Beim Genfersee lassen umgekehrt die auf die Niveauschwankungen einwirkenden Verhältnisse eher auf eine geringe Beweglichkeit der Seefläche schliessen, denn die Niederschläge im Rhonegebiet sind verhältnismässig gering, das Einzugsgebiet ist ausserordentlich langgestreckt und enthält ca. 13% Firn- und Gletscherfläche. Dennoch ist $\frac{h \cdot f}{F}$ grösser für den Genfersee als für den Vierwaldstättersee. Die Abflussverhältnisse scheinen demnach hier weniger günstig zu sein. Das grösste $\frac{h \cdot f}{F}$ der ersten Seegruppe weisen auf: Zugersee 50.1 cm und Lago di Lugano 59.7 cm. Der Zugersee hat etwas trägen Ablauf und empfängt seinen Zufluss aus dem

verhältnismässig kleinen Einzugsgebiete ziemlich rasch. Die hohe Zahl 59.7 cm des Lago di Lugano begreift man schon besser, da der See gegenüber seinem Einzugsgebiete ziemlich central liegt, und die Zuflussrinnen sehr steil sind. Zudem sind in den transalpinen Gebieten die Regenfälle durchschnittlich weit intensiver als auf der Nordseite der Alpen.

Für die zweite Seegruppe fallen die $\frac{h \cdot f}{F}$ begreiflicherweise sehr verschieden aus, da die Zuflussverhältnisse ausserordentlich verschieden sind. Die Mittelzahl der $\frac{h \cdot f}{F}$ beträgt 29.4; sie steht, da die Zuflüsse schon teilweise reguliert sind, tiefer als das Mittel der ersten Seegruppe. Unter diesem Mittel stehen die $\frac{h \cdot f}{F}$ für den Bielersee und den Thunersee, während diejenigen für den Zürichsee, Neuenburgersee und Lago Maggiore über dem Mittel stehen. Für die zwei letzteren Seen steht $\frac{h \cdot f}{F}$ sogar über dem Mittel der ersten Seegruppe. Durch die Juragewässerkorrektion, besonders durch die Ausführung des Hageneckkanals sind die Zuflussverhältnisse des Bielersees ganz bedeutend verändert worden. Das Einzugsgebiet ist beinahe auf das Dreifache gestiegen, von 3057 km² auf 8159 km². Die mittlere jährliche Summe von Steigen und Fallen beträgt für die Zeit der 21 Jahre nach der Durchführung der Korrektion (1877 — 1897) 1301 cm, sie ist also von 410 cm (vor der Korrektion) auf etwas mehr als das Dreifache gestiegen (Tafel IV), so dass $\frac{h \cdot f}{F}$ sich nur ganz wenig verändert hat, es ist von 5.7 cm auf 6.2 cm gestiegen. Gegenüber den $\frac{h \cdot f}{F}$ der andern Seen ist diese Zahl sehr klein, was gewiss nicht überraschen wird, wenn man an die Regulierung des Zuflusses durch Murten- und Neuenburgersee und nun auch durch den Brienzer- und Thunersee denkt. Für den Thunersee ist $\frac{h \cdot f}{F} = 18.1$ cm, und für den Zürichsee 29.9 cm. Diese Verhältnisse sind für beide Perioden (1867 — 1886) und (1887 — 1897) beinahe gleich ausgefallen. Für den Neuenburgersee war $\frac{h \cdot f}{F}$ vor der Korrektion 34.7 cm und ist nun in

der Zeit 1880 bis 1897, also nach der Korrektion, auf 45.6 cm gestiegen. Der Abfluss wird eben, wie schon oben bemerkt, sehr oft durch den Bielersee gehemmt. Trotz Regulierung des Zuflusses durch den Murtensee steht $\frac{h \cdot f}{F}$ sogar über dem Mittel 36.4 cm der ersten Seegruppe. Die Niveauschwankungen des Bielersees, aber auch diejenigen des Neuenburgersees, haben durch den Einfluss der Juragewässerkorrektion — wie zu erwarten war — ganz bedeutend zugenommen. Auf die Schwankungen des Murtensees erstreckt sich aber der Einfluss nicht merklich. Für Lago Maggiore ist $\frac{h \cdot f}{F} = 47.3$, weit über dem Mittel 36.4 der ersten Seegruppe, immerhin ziemlich kleiner als für den Lago di Lugano. Bei den beiden südalpinen Seen sind eben alle Verhältnisse einem bedeutenden Schwanken günstig.

Nicht nur die Jahressummen von Steigen und Fallen der Seen geben Anlass zu interessanten Vergleichungen, sondern auch die Differenzen zwischen den niedrigsten und höchsten Wasserständen eines Jahres. Tafel VI enthält diese Differenzen für alle 13 Seen von Jahr zu Jahr, durch die ganze Periode der 31 Jahre 1867 — 1897 hindurch, und Tafel VII die Uebersicht über die kleinsten und grössten Differenzen zwischen den niedrigsten und höchsten Wasserständen in einem Jahre, während 1867 — 1897, über die Amplituden dieser Differenzen, über die mittleren Differenzen, und für 3 Seen noch die Differenz zwischen dem niedrigsten und höchsten Wasserstande in der ganzen Periode 1867 — 1897. Die letzten Differenzen lassen sich ohne eingehende Untersuchungen nur für den Genfersee, Lago di Lugano und Lago Maggiore mit einiger Sicherheit angeben, da bei den anderen vielfach Veränderungen in der Höhe der Nullpunkte vorgekommen sind.

Die mittlere Differenz zwischen dem niedrigsten und höchsten Wasserstande eines Jahres ist am geringsten beim

1.	Zugersee . . . 0.63 m	7.	Brienzersee . . 1.54 m
	dann folgen:	8.	Lago di Lugano 1.55 m
2.	Vierwaldstättersee 1.06 m	9.	Murtensee . . 1.75 m
3.	Thunersee . . 1.17 m	10.	Bielersee . . . 1.81 m
4.	Zürichsee } . . 1.22 m	11.	Bodensee . . . 2.08 m
5.	Genfersee }	12.	Wallenstattersee 2.68 m
6.	Neuenburgersee . 1.42 m	13.	Lago Maggiore . 2.99 m

Nach der Amplitude der Differenzen (also Unterschied zwischen der kleinsten und grössten Differenz des höchsten und niedrigsten Wasserstandes in einem Jahre) in der Periode 1867 — 1897, stellen sich die Seen in folgender Reihe:

1. Zugersee . . .	0.72 m	8. Wallenstattersee	1.69 m
2. Vierwaldstättersee	1.06 m	9. Bodensee . . .	1.92 m
3. Genfersee		10. Murtensee . .	2.01 m
4. Thunersee . .	1.12 m	11. Bielersee . . .	2.15 m
5. Brienzersee . .	1.17 m	12. Lago di Lugano	2.33 m
6. Zürichsee . .	1.29 m	13. Lago Maggiore .	6.14 m
7. Neuenburgersee	1.68 m		

Wir sehen also da die 13 Seen geordnet nach der Gleichmässigkeit ihrer jährlichen Unterschiede zwischen höchstem und niedrigstem Wasserstande.

Bei hydrotechnischen Fragen sind durchaus nicht nur die mittleren Wasserstände von Wichtigkeit, noch mehr ins Gewicht fallen die niedrigsten und höchsten Wasserstände, deshalb hat denn auch das schweizerische hydrometrische Bureau in den graphischen Beilagen zum Bande der Hauptergebnisse der schweiz. hydrom. Beobachtungen für das Jahr 1890, welche für verschieden lange Perioden die Wasserstände der 5 Seen Murtensee, Neuenburgersee, Bielersee, Lago di Lugano und Lago Maggiore enthalten, nur die Kurven der höchsten und niedrigsten Wasserstände zur Uebersicht gebracht.

In den 3 Tafeln der Juraseen habe ich für die Zeit 1867 — 97 auch die Kurven der Mittelwasserstände eingezeichnet. Diese 3 Tafeln sind von ganz besonderem Interesse, da die Zeitpunkte des Beginns und der Vollendung der einzelnen Teile der Juragewässerkorrektion, sowie auch die nach Project La Nicca für die Zeit nach der Korrektion berechneten Hoch- und Niederwasserstufen eingezeichnet sind.[1]) Es kommt in diesen Tafeln der Erfolg der Juragewässerkorrektion für jeden der 3 Seen zu schöner übersichtlicher Darstellung. Wir heben zum Schlusse Einiges hervor:

(Siehe Tabelle S. 45.)

[1]) Die 3 Tafeln konnten hier nicht reproduciert werden, dagegen ist eine graphische Uebersicht der jährlichen Mittelwasserstände der Jura-See'n mit Angabe der Zeitpunkte von Beginn und Vollendung der einzelnen Teile der Juragewässercorrection etc. beigegeben.

Jährliche Mittelwasserstände
der Jura-Seen.
Murtensee
Neuenburgersee
Bielersee
435.0
434.0
433.0
432.0
über Meer 431.0
Beginn der Arbeiten am Nidau-Büren-Canal.
Beginn der Arbeiten am Hageneck-Canal.
Beginn der Arbeiten an der obern Zihl.
Ende der Arbeiten an der obern Zihl.
Beginn des Schleusendienstes in Nidau im November
Ende der Arbeiten am Hageneck-Canal
Ende der Arbeiten am Nidau-Büren-Canal
1867 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98

A. Murtensee.

Wasserstände	Vor der Korrektion	Nach der Korrektion	Senkung	Nach der Korrektion n. Project La Nicca	Senkung n. La Nicca
	Meter über Meer	Meter über Meer	Meter	Meter über Meer	Meter
a. Aussergewöhnliches Hochwasser	436.44	434.75	1.69	435.16	1.28
b. Mittler. Hochwasser (57-76)	435.82	433.72	2.10		
c. Mittleres Niederwasser	434.49	431.91	2.58	432.50	1.99
d. Aussergewöhnliches Niederwasser	434.22	79-88 : 431.41 89-96 : 431.64	2.81 2.58		
e. Mittelwasserstand . .	ca 435.00	ca 432.60	2.40		
	Vor der Korrektion	Nach der Korrektion		N. d. Korrekt. (Proj. La Nicca)	
Aussergewöhnl. Hochwasser	m 436.44	m 434.75		m 435.16	
Aussergewöhnl. Niederwasser	m 434.22	m 431.64		m 432.50	
Schwankungsamplitude . .	m 2.22	m 3.11		m 2.66	

Vor Erstellung der Schleusen in Nidau war das aussergewöhnliche Niederwasser des Murtensees 431.41 m, also die Schwankungsamplitude noch grösser: 434.75 — 431.41 = 3.34 m.

Mittleres Hochwasser:

vor der Korrekt. 435.82 m, nach der Korrekt. 433.72 m,

Mittler. Niederwasser:

vor der Korrekt. 434.49 m, nach der Korrekt. 431.91 m

Schwankungsamplit.:

vor der Korrekt. 1.33 m, nach der Korrekt. 1.81 m.

Die Grenzen von Hochwasser und Niederwasser liegen seit der Korrektion um ca. 1 Meter weiter auseinander als vor der Korrektion.

Die aussergewöhnlichen Hochwasser haben sich nach der Korrektion um 1.69 Meter gesenkt, während nach dem Project La Nicca nur eine Senkung von 1.28 Meter zu erwarten gewesen wäre. Das

mittlere Niederwasser hat sich ebenfalls um 0.59 m mehr gesenkt als das Project erwarten liess.

B. Neuenburgersee.

Eine eigentümliche, leider noch unerklärte Erscheinung, fällt bei der Betrachtung der Tafel für den Neuenburgersee sofort auf. Das Mittel der Hochwasser für die Periode 1817 — 1856 steht um volle 0.56 Meter höher als dasjenige der Periode 1857 — 1876, ohne dass irgend welche erhebliche Korrektionen im Zeitraume von 1817—1876 ausgeführt worden sind. Ob da wirklich eine so bedeutende Senkung eingetreten ist, oder ob nicht vielleicht die Erscheinung auf Unsicherheiten in den Pegelnullpunkten zurückzuführen wäre, das wird schwierig zu entscheiden sein. In den folgenden Betrachtungen lassen wir die Periode 1817 — 1857 ausser Betracht. Wir dürfen das um so eher, da auch für den Murten- und Bielersee in den Tafeln die Wasserstände erst von 1857 an eingezeichnet sind.

Wasserstände	Vor der Correction	Nach der Correction	Senkung	Nach der Correction (nach La Nicca)	Senkung (nach La Nicca)
	Meter üb. Meer	Meter üb. Meer	Meter	Meter üb. Meer	Meter
a. Aussergewöhnliches Hochwasser . . .	436.30	434.26	2.04	434.94	1.36
b. Mittleres Hochwasser	435.53	433.27	2.26		
c. Mittleres Niederwasser	434.41	431.77	2.64	432.28	2.13
d. Aussergewöhnliches Niederwasser . . .	434.07	431.48	2.59		
e. Mittelwasserstand .	ca. 434.85	ca. 432.45	ca. 2.40		
Aussergew. Hochwasser	436.30	434.26		434.94	
» Niederwasser	434.07	431.48		432.28	
Schwankungsamplitude	**2.23**	**2.78**		**2.66**	

Vor der Erstellung der Schleusen in Nidau stand das ausserordentliche Niederwasser des Neuenburgersee's auf 431.20, also die Schwankungsamplitude 434.26 — 431.20 = **3.06** m.

Mittleres Hochwasser vor der Corr. 435.53 m, nach der Corr. 433.27 m.
Mittleres Niederwasser » » 434.41 » » » 431.77
Schwankungsamplitude » » **1.12** m, » » » **1.50** m.

C. Bielersee.

Wasserstände	Vor der Correction	Nach der Correction	Senkung	Nach der Correction (nach La Nicca)	Senkung (nach La Nicca)
	Meter üb. Meer	Meter üb. Meer	Meter	Meter üb. Meer	Meter
a. Aussergewöhnliches Hochwasser . . .	435.73	434.10	1.63	434.71	1.02
b. Mittleres Hochwasser	434.99	433.21	1.78	433.96	1.03
c. Mittleres Niederwas.	433.78			431.71	2.07
Vor Errrichtung der Schleusen in Nidau		431.16	2.62		
Nach Errichtung der Schleusen in Nidau		431.45	2.33		
d. Aussergewöhnliches Niederwasser . .	433.42			431.38	2.04
Vor Errichtung der Schleusen . . .		430.71	2.71		
Nach Errichtung der Schleusen . . .		431.42	2.00		
e. Mittelwasserstand .	ca. 434.25	432.10	ca. 2.15		
Aussergew. Hochwasser	435.73	434.10		434.71	
» Niederwasser	433.42	431.42		431.38	
Schwankungsamplitude	**2.31**	**2.68**		**3.33**	
Aussergew. Niederwass. vor Errichtung der Schleusen in Nidau .		**430.71**			
Schwankungsamplitude		**3.39**			
Mittleres Hochwasser .	434.99	433.21		433.96	
» Niederwasser	433.78	431.45		431.71	
Schwankungsamplitude .	**1.21**	**1.76**		**2.25**	
Mittl. Niederwasser vor Errichtung der Schleusen		**431.16**			
Schwankungsamplitude .		**2.05**			

Die aussergewöhnlichen Hochwasser sind infolge der Juragewässercorrection mehr gefallen als nach Project La Nicca zu erwarten war, und zwar beim Murtensee um 0.41 m, beim Neuenburgersee um 0.68 m und beim Bielersee um 0.61 m.

Das mittlere Hochwasser des Bielersee's ist um 0.75 m mehr gesunken als nach Project La Nicca zu erwarten war.

Das mittlere Niederwasser des Bielersee's ist um 0.26 m mehr gesunken als nach Project La Nicca zu erwarten war.

Das aussergewöhnliche Niederwasser hat sich seit Errichtung des Schleusendienstes in Nidau um nur 4 cm weniger gesenkt, als nach dem Projecte La Nicca zu erwarten war, der Schleusendienst bewährt sich demnach als vollkommen zweckentsprechend.

Nach alledem erweist sich als unumstössliche Thatsache, dass die grossartige Arbeit der Juragewässercorrection uns mehr als die erwarteten Vorteile gebracht hat. Wenn man trotzdem hie und da Klagen über die jetzigen Zustände der Seeniveaux im Juragewässergebiete zu hören bekommt, so mögen sie der viel grösseren Beweglichkeit der Niveaux seit Durchführung der Correction zur Last zu schreiben sein Nach Beendigung der Correction ist freilich noch keine lange Zeit verflossen, es mögen sich in Zukunft die mittleren Verhältnisse noch ein wenig verändern, allein wenn man die Curven der höchsten und niedrigsten Wasserstände der drei vom hydrometrischen Bureau ausgearbeiteten Tafeln aufmerksam betrachtet, so wird man zur Ueberzeugung kommen, dass bedeutende Veränderungen kaum zu erwarten sein werden.

Summa der Wasserstands-Differenzen.

Fluss-Gebiet		1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880	1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888	1889	1890	1891	1892	1893	1894	1895	1896	1897	Summe	Mittel h.	Amplituden der Jahres-summen	Mittel für 1867—1886	Mittel für 1887—1897
		Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter					
Rhein	Bodensee	8.3	8.2	6.5	6.4	7.0	7.1	6.5	6.5	7.6	8.6	8.6	7.0	6.8	7.5	6.7	6.5	6.3	5.7	6.8	5.7	5.3	**9.7**	7.0	9.5	7.4	7.3	**5.00**	5.2	5.5	7.6	9.0	218.8	7.06	4.7	7.02	7.12
	Konstanz																																			Diff.	+ 0.10
Aare	Brienzersee		—	—	–	—	10.3	10.3	10.2	12.4	9.3	12.1	9.1	**5.8**	9.0	10.9	10.7	9.3	9.0	8.5	7.9	8.2	10.6	9.4	7.6	10.0	9.9	6.9	7.1	9.6	10.1	**12.8**	(247.0)	9.50	7.0	9.65	9.28
	Ringgenberg																																				– 0.37
„	Thunersee				—	—	11.6	9.2	8.4	11.0	9.8	**11.7**	9.9	8.2	10.2	10.2	7.6	10.0	8.6	9.8	8.1	7.7	10.2	8.9	7.3	9.2	9.2	**6.4**	7.2	8.5	10.1	11.3	(240.3)	9.24	5.3	9.62	8.71
	Därligen																																				– 0.91
„	Murtensee (Murten) . . .	7.2	4.9	5.3	5.6	4.8	7.2	6.3	**4.0**	6.6	7.7	7.5	9.9	10.2		9.1	10.9	7.6	4.7	7.6	7.1	5.9	**11.0**	7.8	8.0	8.4	5.9	6.2	4.8	8.8	8.2	8.8	(218.0)	7.27	7.0	7.06	7.62
	Sugiez (1884—1889)																																				+ 0.56
„	Neuenburgersee	4.7	3.5	3.6	3.9	3.6	4.1	**2.8**	3.0	4.2	4.5	4.4	4.7	3.7	3.6	4.6	4.9	5.4	3.3	5.4	5.0	**7.5**	7.1	6.5	5.7	5.8	4.7	4.3	4.1	5.6	7.4	**7.5**	149.1	4.81	4.7	4.15	6.00
	Neuenburg																																				+ 1.85
„	Bielersee (Nidau) . . .	5.1	**3.6**	4.1	4.1	3.7	5.5	4.7	6.1	7.7	8.1	9.3	11.3	7.9	7.8	10.5	13.6	11.4	10.5	12.4	13.2	15.0	17.4	14.8	15.4	15.5	15.7	12.1	10.7	14.1	16.7	**17.9**	325.9	10.51	14.3	8.03	15.03
	Neuenstadt (1892—1897)																																				+ 7.00
Reuss	Vierwaldstättersee . .	9.0	9.5	6.9	7.2	6.4	7.5	7.4	7.4	8.5	8.4	**9.6**	8.3	8.0	6.5	6.7	5.4	6.3	4.6	6.8	6.1	5.4	7.7	7.0	6.0	7.4	7.0	5.6	**3.2**	3.4	6.7	8.6	214.5	6.92	6.4	7.33	6.17
	Seeburg																																				– 1.16
„	Zugersee	**4.4**	3.6	4.2	2.6	2.9	3.5	3.7	3.3	3.0	4.0	3.7	4.0	3.8	3.0	4.0	3.8	2.9	2.9	3.2	3.8	2.7	4.0	2.8	2.7	2.5	3.2	2.1	2.4	**2.0**	4.2	3.6	102.5	3.31	2.4	3.52	2.91
	Zug																																				– 0.61
Limmat	Wallenstattersee . . .	**19.7**	17.6	16.7	16.6	14.8	14.7	13.9	14.1	16.5	15.2	18.0	15.5	12.4	13.6	13.6	13.5	12.6	10.8	15.9	**10.2**	11.1	16.8	13.1	16.9	14.8	14.2	11.2	10.4	10.6	16.3	19.2	450.5	14.53	9.5	14.80	14.05
	Weesen																																				– 0.75
„	Zürichsee	**8.4**	6.4	6.4	6.6	6.2	5.8	6.1	5.9	6.5	7.5	7.9	7.0	6.7	6.2	7.0	6.3	5.4	4.9	5.6	5.5	4.6	6.6	5.6	7.0	6.4	5.5	**4.3**	4.7	4.6	6.6	7.3	191.5	6.18	4.1	6.42	5.73
	Schmerikon																																				– 0.69
Rhone	Genfersee	4.7	4.9	4.4	4.7	4.5	3.9	5.4	5.0	5.3	6.5	**6.8**	6.3	6.7	5.3	5.7	5.9	6.7	4.9	6.0	5.1	4.9	5.6	5.3	4.1	5.0	4.0	4.2	**3.3**	4.4	5.2	5.0	159.7	5.15	3.5	5.44	4.62
	Genf (Jardin anglais)																																				– 0.82
Tessin	Lago di Lugano . . .		8.6	5.8	**2.9**	3.5	**12.2**	8.7	4.5	4.7	7.1	9.5	8.9	9.0	6.8	5.9	9.7	6.8	3.5	8.7	8.8	5.1	9.4	8.2	9.9	8.4	7.2	3.1	4.3	5.2	10.1	6.0	(212.5)	7.08	9.3	7.14	6.97
	Lugano																																				– 0.17
„	Lago Maggiore	—	23.0	14.0	**6.6**	7.0	**31.2**	21.8	14.6	11.4	9.8	14.8	15.5	14.3	13.8	11.0	18.9	9.4	7.8	18.1	19.1	11.2	16.7	18.2	20.2	16.7	15.6	9.8	8.8	8.4	14.7	12.0	(434.4)	14.48	24.6	14.85	13.84
	Locarno																																				– 1.01

Mittlere jährliche Summa

der Wasserstandsdifferenzen, reduziert auf die Oberflächen der See-Einzugsgebiete.

See	See-oberflächen in km² f	Oberfläche des See-Einzugs-gebietes in km² F	Verhältnis $\frac{f}{F}$	Mittlere jährl. Summe der Wasserstands-Differenzen h	Periode der Beobachtungen	Reduzierte Wasserstands-Differenzen Summe $\frac{h \cdot f}{F}$
I. Seen, die das zufliessende Wasser ihres Gebietes direkt erhalten:						
1. Bodensee	467.0	10,997.9	0.0425	702	1867—1886 : 20 Jahre	29.8
2. Brienzersee	30.0	1,135.0	0.0264	965	1872—1886 : 15 Jahre	25.5
3. Murtensee (vor der Korr.)	27.4	778.8	0.0352	596	1867—1876 : 10 Jahre	21.0
3. Murtensee (nach der Korr.)	22.9		0.0294	783	1881—1886 : 6 Jahre	23.0
4. Vierwaldstättersee . .	113.4	2,241.6	0.0506	732	1867—1886 : 20 Jahre	37.1
5. Zugersee	38.5	254.4	0.1513	352	1867—1886 : 20 Jahre	53.2
6. Wallenstattersee . .	23.3	1,050.0	0.0222	1,480	1867 —1886 : 20 Jahre	32.9
7. Genfersee	577.8	7,994.5	0.0723	544	1867—1886 : 20 Jahre	39.3
8. Lago di Lugano . .	50.5	599.0	0.0843	713	1868—1886 : 19 Jahre	60.1
II. Seen, die ihre Gewässer zum Teil reguliert erhalten:						
					Mittel =	37.5
9. Thunersee	47.9	2,448.7	0.0196	962	1872—1886 : 15 Jahre	18.8
10. Neuenburgersee (v.d.Korr.)	239.6	2,619.6	0.0915	379	1867—1876 : 10 Jahre	34.7
10. Neuenburgersee (n.d.Korr.)	218.2		0.0833	460	1880—1886 : 7 Jahre	38.3
11. Bielersee (v. d. Juragew.-Korr.)	42.2	3,057.0	0.0138	412	1867—1871 : 5 Jahre	5.7
11. Bielersee (n. d. Juragew.-Korr.)	39.4	8,159.8	0.0048	1,079	1877—1886 : 10 Jahre	5.2
12. Zürichsee	87.8	1,815.1	0.0484	642	1867—1886 : 20 Jahre	31.4
13. Lago Maggiore . . .	214.3	6,548.0	0.0327	1,485	1868—1886 : 19 Jahre	48.6

Periode 1887—1897.

Tafel III.

Mittlere jährliche Summa der Wasserstandsdifferenzen, reduziert auf die Oberflächen der See-Einzugsgebiete.

See	See-oberflächen in km² f	Oberfläche des See-Einzugs-gebietes in km² F	Verhältnis $\frac{f}{F}$	Mittlere jährl. Summe der Wasserstands-Differenzen h	Periode der Beobachtungen	Reduzierte Wasserstands-Differenzen-Summe $\frac{h \cdot f}{h}$
I. Seen, die das zufliessende Wasser ihres Gebietes direkt erhalten:						
1. Bodensee	467.0	10,997.9	0.0425	712	11 Jahre	30.3
2. Brienzersee	30.0	1,135.0	0.0264	928	„	24.5
3. Murtensee	22.9	778.8	0.0294	762	„	22.4
4. Vierwaldstättersee . .	113.4	2,241.6	0.0506	617	„	31.2
5. Zugersee	38.5	254.4	0.1513	291	„	44.0
6. Wallenstattersee . .	23.3	1,050.0	0.0222	1,405	„	31.2
7. Genfersee	577.8	7,994.5	0.0723	462	„	33.4
8. Lago di Lugano . . .	50.5	599.0	0.0843	697	„	58.8
					Mittel =	34.5
II. Seen, die ihre Gewässer zum Teil reguliert erhalten:						
9. Thunersee	47.9	2,448.7	0.0196	871	„	17.1
10. Neuenburgersee . . .	218.2	2,619.6	0.0833	600	„	50.0
11. Bielersee	39.4	8,159.8	0.0048	1,503	„	7.2
12. Zürichsee	87.8	1,815.1	0.0484	573	„	27.7
13. Lago Maggiore . . .	214.3	6,548.0	0.0327	1,384	„	45.3

Mittlere jährliche Summa der Wasserstandsdifferenzen, reduziert auf die Oberflächen der See-Einzugsgebiete.

See	See-oberflächen in km² f	Oberfläche des See-Einzugsgebietes in km² F	Verhältnis $\frac{f}{F}$	Mittlere jährl. Summe der Wasserstands-Differenzen h	Periode der Beobachtungen	Reduzierte Wasserstands-Differenzen-Summe $\frac{h \cdot f}{F}$
I. Seen, die das zufliessende Wasser ihres Gebietes direkt erhalten:						
1. Bodensee	467.0	10,997.9	0.0425	706	1867—1897 : 31 Jahre	30.0
2. Brienzersee	30.0	1,135.0	0.0264	950	1872—1897 : 26 Jahre	25.1
3. Murtensee (vor d. Korrekt.)	27.4	778.8	0.0352	596	1867—1876 : 10 Jahre	21.0
3. Murtensee (nach d. Korrekt.)	22.9	778.8	0.0294	769	1881—1897 : 17 Jahre	22.6
4. Vierwaldstättersee . .	113.4	2,241.6	0.0506	692	1867—1897 : 31 Jahre	35.0
5. Zugersee	38.5	254.4	0.1513	331	1867—1897 : 31 Jahre	50.1
6. Wallenstattersee . .	23.3	1,050.0	0.0222	1,453	1867—1897 : 31 Jahre	32.2
7. Genfersee	577.8	7,994.5	0.0723	515	1867—1897 : 31 Jahre	37.2
8. Lago di Lugano . .	50.5	599.0	0.0843	708	1868—1897 : 30 Jahre	59.7
II. Seen, die ihre Gewässer zum Teil reguliert erhalten:					Mittel =	36.4
9. Thunersee	47.9	2,448.7	0.0196	924	1872—1897 : 10 Jahre	18.1
10. Neuenburgersee (vor der Juragewässer-Korrektion)	239.6	2,619.6	0.0915	379	1867—1876 : 10 Jahre	34.7
10. Neuenburgersee (nach der Juragewässer-Korrektion)	218.2	2,619.6	0.0833	547	1880—1897 : 18 Jahre	45.6
11. Bielersee (v.d. Juragew.-Korr.)	42.2	3,057.9	0.0138	410	1867—1871 : 5 Jahre	5.7
11. Bielersee (n. d. Juragew.-Korr.)	39.4	8,159.8	0.0048	1,301	1877—1897 : 21 Jahre	6.2
12. Zürichsee	87.8	1,815.1	0.0484	618	1867—1897 : 31 Jahre	29.9
13. Lago Maggiore . . .	214.3	6,548.0	0.0327	1,448	1868—1897 : 30 Jahre	47.3

Tabelle V.

See.	Mittlere jährl. Summen, von Steigen und Fallen, reduziert auf die Flächen der Einzugsgebiete. $\frac{h\ f}{F}$			
	Periode 1867/1886	Periode 1886/1897	Ganze Periode 1867/1897	
	cm	cm	cm	
I. See'n, die das zufliessende Wasser ihres Gebietes direkt erhalten:				
1. Bodensee . . .	29.8	30.3	30.0	
2. Brienzersee . . .	25.5	24.5	25.1	
3. Murtensee: a) vor d. Juragew. Correkt. (1867—1876) . .	21.0	22.4	22.6	(1881—1897)
b) nach der Juragew. Corr. (1881=1886)	23.0			
4. Vierwaldstättersee .	37.1	31.2	35.0	
5. Zugersee	53.2	44.0	50.1	
6. Wallenstattersee .	32.0	31.2	32.2	
7. Genfersee . . .	39.3	33.4	37.2	
8. Lago di Lugano .	60.1	58.8	59.7	
Mittel	**37.5**	**34.5**	**36.4**	
II. See'n, die ihren Zufluss zum Teil reguliert erhalten:				
9. Thunersee . . .	18.8	17.1	18.1	
10. Neuenburgersee a) vor der Juragew. Corr. (1867—1876)	34.7			
b) nach der Juragew. Corr. (1880—1886)	38.3	50.0	45.6	(1880—1897)
11. Bielersee a) vor der Juragew. Corr. (1867—1871)	5.7			
b) nach der Juragew. Corr. (1877—1886)	5.2	7.2	6.2	(1877—1897)
12. Zürichsee . . .	31.4	27.7	29.9	
13. Lago Maggiore . .	48.6	45.3	47.3	
Mittel	**28.2**	**29.5**	**29.4**	

Tafel VI.

	Bodensee			Brienzersee			Thunersee			Murtensee			Neuenburgersee			Bielersee			Vierwaldstättersee			Zugersee			Wallenstattersee			Zürichsee			Genfersee			Lago di Lugano			Lago Maggiore		
	Höchster Wasserstand b. W. / Niedrigster Wasserstand b. W.		Differenz D.	h. W.	n. W.	D.	h. W.	n. W.	D.	h. W.	n. W.	D.	h. W.	n. W.	D.	h. W.	n. W.	D.	h. W.	n. W.	D.	h. W	n. W.	D.	h. W.	n W.	D.	h. W.	n. W.	D	h. W.	n. W.	D.	h. W.	n. W.	D.	h. W.	n. W.	D.
																														m	m	m	m	m	m	m	m	m
1867	3.1′	10.4′	7.3′ +2.19 m	—	—	—	—	—	—	3.0′	8.9′	5.9′ +1.77 m	3.7′	9.4′	5.7′ +1.71 m	4.3′	10.4′	6.1′ +1.83 m	1.4′	5.9′	4.5′ +1.35 m	2.2′	3.8′	1.6′ +0.48 m	3.0′	13.5′	10.5′ +3.15 m	3.0′	7.3′	4.3′ +1.29 m	2.40	0.83	1.57	—	—	—	—	—	—
1868	2.8′	10.4′	7.6′ +2.28 m	—	—	—	—	—	—	4.5′	9.5′	5.0′ +1.50 m	6.2	10.0′	3.8′ +1.14 m	3.4′	7.6′	4.2′ +1.26 m	1.7′	6.3′	4.6′ +1.38 m	2.6′	4.2′	1.6′ +0.48 m	3.0′	13.2′	10.2′ +3.06 m	2.8′	7.4′	4.6′ +1.38 m	2.40	0.75	1.65	2.56	0.10	2.46	7.44[2]	0.09	**7.35**
1869	5.8′	11.1′	5.3′ +1.59 m			—	—	—	—	4.6′	9.6′	5.0′ +1.50 m	5.9′	10.4′	4.5′ +1.35 m	3.36′	7.86′	4.5′ +1.35 m	2.6′	6.0′	3.4′ +1.02 m	2.4′	4.0′	1.6′ +0.48 m	6.2′	13.3′	7.1′ +2.13 m	3.9′	7.7′	3.8 +1.14 m	2.11	0.88	1.23	1.60	0.13	1.47	2.95	0.14	1.81
1870	7.3′	11.5′	4.2′ **+1.26 m**	—	—	—	—	—	—	5.1′	10.4′	5.3′ +1.59 m	6.6′	11.2′	4.6′ +1.38 m	4.7′	8.3′	3.6′ +1.08 m	3.0′	6.2′	3.2′ +0.96 m	2.6′	5.0′	2.4′ +0.72 m	4.4′	13.9′	9.5′ +2.85 m	3.5′	8.0′	4.5′ +1.35 m	2.14	0.68	1.46	0.72	0.00	0.72	1.02	−0.19	**1.21**
1871	4.2′	11.1′	6.9′ +2.07 m	—	—	—	—	—	—	6.4′	10.0′	3.6′ +1.08 m	7.0′	10.5′	3.5′ +1.05 m	5.6′	9.1′	3.5′ +1.05 m	3.1′	6.0′	2.9′ +0.87 m	2.5′	4.6′	2.1′ +0.63 m	5.1′	14.4′	9.3′ +2.79 m	3.9′	8.2′	4.3′ +1.29 m	2.33	0.82	1.51	0.86	0.12	0.74	1.78	−0.19	1.97
1872	3.9′	11.8′	7.9′ +2.37 m	90.5′	85.0′	5.5′ +1.65 m	68.5′	64.8′	3.7′ +1.11 m	4.6′	10.1′	5.5′ +1.65 m	6.5′	10.5′	4.0′ +1.20 m	98.8′	93.7′	5.1′ +1.53 m	2.8′	5.9′	3.1′ +0.93 m	2.3′	4.7′	2.4′ +0.72 m	5.4′	14.4′	9.0′ +2.70 m	3.2′	8.2′	5.0′ +1.50 m	2.37	0.74	1.63	2.23	0.15	2.08	4.75	−0.19	4.96
1873	4.9′	11.2′	6.3′ +1.89 m	91.0′	85.4′	5.6′ +1.68 m	69.3′	64.8′	4.5′ +1.35 m	4.8′	9.7′	4.9′ +1.47 m	7.0′	9.9′	2.9′ +0.87 m	96.5′	92.2′	4.3′ +1.29 m	2.3′	5.9′	3.6′ +1.08 m	2.6′	4.2′	1.6′ +0.48 m	6.1′	14.1′	8.0′ +2.40 m	4.4′	8.1′	3.7′ +1.11 m	2.39	0.92	1.47	1.90	0.40	1.50	2.96	0.12	2.84
1874	3.8′	11.5′	7.7′ +2.31 m	91.7′	85.2′	6.5′ +1.95 m	70.2′	64.7′	5.5′ +1.65 m	7.0′	10.4′	3.4 +1.02 m	8.6′	10.9′	2.3′ **+0.69 m**	93.7′	88.3′	5.4′ +1.62 m	1.5′	5.8′	4.3′ +1.29 m	1.8′	4.7′	2.9′ +0.87 m	5.1′	14.1′	9.0′ +2.70 m	3.3′	8.1′	4.8′ +1.44 m	2.45	0.76	**1.69**	0.81	0.12	**0.69**	2.20	−0.05	2.25
1875	4.0′	11.1′	7.1′ +2.13 m	90.9′	84.5′	6.4′ +1.92 m	68.4′	65.5′	2.9′ +0.87 m	4.2′	9.3′	5.1′ +1.53 m	5.9′	9.7′	3.8′ +1.14 m	97.2′	90.8	6.4′ +1.92 m	2.9′	5.9′	3.0′ +0.90 m	2.7′	4.5′	1.8′ +0.54 m	5.0′	13.9′	8.9′ +2.67 m	3.9′	7.5′	3.6′ +1.08 m	2.41	0.93	1.48	1.32	0.06	1.26	2.84	−0.28	3.12
1876	1.2′	11.0′	9.8′ +2.94 m	90.8′	85.9′	4.9′ +1.47 m	70.1′	65.5′	4.6′ +1.38 m	3.2′	9.9′	6.7′ +2.01 m	5.1′	10.3′	5.2′ +1.56 m	97.5′	90.1′	7.4′ +2.22 m	2.0′	5.9′	3.9′ +1.17 m	1.2′	4.1′	2.9′ +0.87 m	2.4′	13.9′	11.5′ +3.45 m	1.2′	7.9′	6.7′ **+2.01 m**	2.57	0.91	1.66	2.12	0.14	1.98	2.38	−0.21	2.59
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m									
1877	0.69	3.28	2.59	7.52	5.78	1.74	61.13	59.60	1.53	1.88	3.78	1.90	2.30	3.77	1.47	28.98	26.97	2.01	8.47	6.80	**1.67**	0.77	1.32	0.55	0.90	4.21	3.31	0.78	2.21	1.43	2.68	1.18	1.50	1.83	0.10	1.73	2.75	−0.21	2.96
1878	5.05	2.83	2.22	7.17	5.72	1.45	60.60	59.65	0.95	2.52	4.62	2.10	2.89	4.74	1.85	28.95	27.15	1.80	9.71	6.80	1.11	0.54	1.14	0.60	1.20	4.13	2.93	0.63	2.12	1.49	2.53	1.12	1.41	1.54	-0.04	1.58	2.30	−0.31	2.61
1879	5.26	2.80	2.46	7.26	5.68	1.58	60.70	59.65	1.05	2.91	5.16	2.25	4.12	5.15	1.03	28.44	27.18	1.26	8.11	6.87	1.24	1.06	0.66	0.40	1.53	4.14	2.61	0.89	2.17	1.28	2.70	1.15	1.55	2.23	0.12	2.11	3.19	−0.24	3.43
1880	4.49	2.58	1.91	6.98	5.64	1.34	60.54	59.12	1.42	—	—	—	4.57	?	?	28.62	26.82	1.80	7.68	6.96	0.72	1.12	0.47	0.65	2.15	4.15	2.00	1.13	2.35	1.22	1.95	0.97	0.98	1.68	0.13	1.55[1]	3.26	−0.34	3.60
1881	4.62	2.72	1.90	7.30	5.76	1.54	60.88	59.42	1.46	3.47	1.92	1.55	30.04	29.13	0.91	28.86	26.97	1.89	8.28	7.00	1.28	1.34	0.43	0.91	1.60	4.24	2.64	0.78	2.25	1.47	2.40	1.09	1.31	1.08	0.17	0.91	1.84	−0.14	1.98
1882	4.36	2.46	1.90	7.03	5.52	1.51	60.45	59.31	1.14	4.75	1.74	**3.01**	31.09	28.72	**2.37**	29.58	26.70	2.88	7.76	7.02	0.74	1.20	0.29	0.91	2.52	4.47	1.95	1.40	2.54	1.14	1.95	0·93	1.02	2·52	0.26	2.26	3.51	− 0.18	3.69
1883	4.74	2.73	2.01	7.28	5.74	1.54	60.71	59.55	1.16	4.53	2.31	2.22	31.52	29.55	1.97	29.61	27.63	1.98	7.99	7.03	0.96	1.10	0.54	0.56	1.81	4.33	2.52	1.14	2.18	1.04	2.49	1.50	0.99	1.47	0.30	1.17	1.95	−0.19	2.14
1884	4.38	2.71	1.67	7.35	5.73	1.62	60.65	59.53	1.12	2.71	Sugiez 1.40	1.31	29.76	28.58	1.18	28.41	26.64	1.77	7.61	6.91	0.70	0.90	0.38	0.52	2.31	4.34	2.03	1.44	2.32	0.88	2.30	0.86	1.44	1.19	0.12	1.07	1.53	−0.37	1.90
1885	4.11	2.54	1.57	6.92	5.62	1.30	60.74	59.65	1.09	3.38	1.47	1.91	30.38	28.37	2.01	28.83	26.55	2.28	7.75	6.84	0.91	1.02	0.36	0.66	1.82	4.46	2.64	1.24	2.38	1.14	2.26	0.83	1.43	1.87	0.14	1.73	2·80	−0.37	3.17
1886	4.24	2.66	1.58	7.10	5.66	1.44	60.32	59.56	0.76	3.31	2.08	1.23	30.05	29.22	0.83	28.35	26.78	1.57	7.62	6.84	0.78	1.08	0.65	0.43	2.54	4.40	**1.86**	1.58	2.30	**0.72**	2.17	1.17	1.00	2.41	0.25	2.16	3.50	−0.10	3.60
1887	4.16	2.54	1.62	7.08	5.55	1.53	60.44	59.45	0.99	3.45	1.90	1.55	30.22	28.95	1.27	28.88	26.75	2.13	7.75	6.84	0.91	1.02	0.50	0.52	2.30	4.50	2.20	1.70	2.45	0.75	2.22	1.00	1.22	1.30	0.22	1.08	2.16	0.03	2.13
1888	5.24	2.60	2.64	7.24	5.30	1.94	60.68	59.26	1.42	4.65	1.88	2.77	30.90	28.90	2.00	29.85	26.70	**3.15**	8.38	6.86	1.52	1.32	0.52	0.80	1.30	4.45	3.15	1.02	2.40	1.38	2.02	1.20	0.82	2.02	0.26	1.76	2.30	−0.25	2.55
1889	4.68	2.64	2.04	7.18	5.32	1.86	60.56	59.38	1.18	3.96	1.75	2.21	31.05	28.90	2.15	29.50	27.25	2.25	7.96	6.90	1.06	1.00	0.40	0.60	2.10	4.62	2.52	1.40	2.55	1.15	2.00	0.86	1.14	2.30	0.28	2.02	4.00	−0.10	4.10
1890	5.81	2.63	**3.18**	2.00	0.62	1.38	1.35	0.30	1.05	3.70	Murten 2.00	1.70	30.54	29.05	1.49	3.36	1.40	2.23	7.95	6.90	1.05	1.28	0.52	0.76	1.09	4.57	3.48	0.90	2.36	1.46	2.00	1.25	0.75	1.78	0.26	1.52	2.98	−0.20	3.18
1891	4.75	2.40	2.35	2.52	0.55	**1.97**	1.75	-0.05	**1.80**	3.38	1.65	1.73	30.60	28.66	1.94	3.65	1.25	2.40	8.30	6.90	1.40	1.10	0.38	0.72	1.40	4.58	3.18	1.08	2.54	1.46	1.80	1.05	0.75	1.72	0.05	1.67	2.60	−0.35	2.95
1892	4.83	2.85	1.98	2.04	0.75	1.29	1.18	0.25	0.93	3.20	2.00	1.20	30.20	29.12	1.08	2.90	Neuenstadt 1.36	1.54	8.00	6.96	1.04	1.05	0.65	0.40	1.65	4.35	2.70	1.32	2.20	0.88	1.74	0.81	0.93	1.93	0.35	1.58	3.52	−0.03	3.55
1893	4.00	2.60	1.40	1.95	0.70	1.25	1.14	0.20	0.94	3.06	1.78	1.28	2.58	1.66	0.92	2.48	1.48	**1.00**	7.76	6.90	0.86	0.81	0.48	**0.33**	2.25	4.45	2.20	1.50	2.35	0.85	1.70	1.07	**0.63**	0.90	0.10	0.80	2.25	−0.28	2.53
1894	4.22	2.48	1.74	1.92	0.62	1.30	0.98	0.30	**0.68**	2.90	1.90	**1.00**	2.75	1.80	0.95	2.80	1.55	1.25	7.70	6.92	0.78	1.02	0.46	0.56	2.15	4.70	2 55	1.32	2.42	1.10	1.77	1.03	0.74	0.95	0.10	0.85	1.84	−0.20	2 04
1895	4.26	2.40	1.86	1.96	0.55	1.41	1.15	0.10	1.05	4.50	1.95	2.55	3.47	1.70	1.77	3 30	1.70	1.60	7.56	6.95	**0.61**	0.94	0.46	0.48	2.70	4.68	1.98	1.56	2.46	0.90	1.85	1.02	0.83	1.20	0.03	1.17	1.50	−0.18	1.68
1896	5.00	2.58	2.42	2.40	0.78	1.62	1.60	0.45	1.15	4.32	2.15	2.17	3.85	2.10	1.75	3.65	1.58	2.07	8.22	6.95	1.27	1.30	0.50	0.80	1.40	4.48	3.08	1.17	2.30	1.13	2.02	0.86	1.16	2.98	-0.04	**3.02**	3.82	−0.40	4.22
1897	5.15	2.62	2.53	2.45	1.65	**0.80**	1.60	0.40	1.20	3.75	2.00	1.75	3.58	1.90	1.68	3.60	1.58	2.02	8.30	6.92	1.38	1.65	0.60	**1.05**	1.00	4.55	**3.55**	0.85	2.35	1.50	2.15	1.15	1.00	1.90	0.16	1.74	3.30	−0.15	3.45
Mittel			**2.08**			**1.54**			**1.17**			**1.75**			**1.42**			**1.81**			**1.06**			**0.63**			**2.68**			**1.22**			**1.22**			**1.55**			**2.99**

[1] Lugano, vorher Ponte Tresa. — [2] Niveau innerhalb 17 Tagen um 6.7 m gestiegen.

13. Lago Maggiore . .	48.6	45.3	47.3
Mittel	**28.2**	**29.5**	**29.4**

Tafel VII.

	Kleinste Differenz zwischend. niedrigst. u. höchsten Wasserstande ein. Jahres in d. Periode 1867-1897	Grösste Differenz zwischend. niedrigst. u. höchsten Wasserstande ein. Jahres in d. Periode 1867-1897	Amplitude dieser Differenzen	Mittlere Differenz zwischend. niedrigst. u. höchsten Wasserstande ein. Jahres für 1867-1897 (31 Jahre)	Differenz zwisch. d. niedrigst. u. höchst. Wasserstande in d. Periode d. 31 Jahre 1867-1897
	m	m	m	m	m
1. Bodensee . . .	1.26	3.18	1.92	2.08	
2. Brienzersee . . .	0.80	1.97	1.17	1.54 (26 Jahre)	
3. Thunersee . . .	0.68	1.80	1.12	1.17 (26 Jahre)	
4. Murtensee . . .	1.00	3.01	2.01	1.75 (30 Jahre)	
5. Neuenburgersee .	0.69	2.37	1.68	1.42 (30 Jahre)	
6. Bielersee . . .	1.00	3.15	2.15	1.81	
7. Vierwaldstättersee .	0.61	1.67	1.06	1.06	
8. Zugersee	0.33	1.05	0.72	0.63	
9. Wallenstattersee .	1.86	3.55	1.69	2.68	
10. Zürichsee . . .	0.72	2.01	1.29	1.22	
11. Genfersee . . .	0.63	1.69	1.06	1.22	2.02
12. Lago di Lugano .	0.69	3.02	2.33	1.55 (30 Jahre)	3.02
13. Lago Maggiore . .	1.21	7.35	6.14	2.99 (30 Jahre)	7.84

A. Baltzer.

Beiträge zur Kenntniss schweizerischer diluvialer Gletschergebiete.

(Eingereicht den 12. November 1899.)

1. Machten die Juragletscher nach dem endgültigen Rückzug des Rhonegletschers noch Vorstösse in die Ebene?

Früher[1]) wies ich nach, dass unsere diluvialen Gletscher nicht gleichzeitig vor- und rückwärts gingen (Regel von der Inkongruenz der Vor- und Rückwärtsperioden). Als der Rhonegletscher gegen Ende der letzten Eiszeit sich zurückzog, machten Aar- und Saanegletscher noch Vorstösse in die Ebene. Es frägt sich, ob dies auch für die kleinen Juragletscher Gültigkeit habe. Schardt[2]) hat diese Frage für den westschweizerischen Jura im bejahenden Sinne beantwortet. Bei den nach der Versammlung von Neuchâtel unter seiner trefflichen Leitung ausgeführten Exkursionen sprach er sich bezüglich der jurassischen Val Travers- und Baulmesgletscher für diese Meinung aus und zeigte uns als Beleg einen Aufschluss im Bahneinschnitt bei Station Boudry, sowie einen als jurassische Endmoräne anzusprechenden Rücken zwischen Rances und St. Christoph bei Baulmes. Da ich noch Zweifel hegte, die Frage mich aber lebhaft interessierte, benützte ich ein paar schöne Herbsttage, um diese und andere Stellen nochmals zu untersuchen.

a. Exkursion: Yverdon, Montagny, Vuitteboeuf, Baulmes, Rances, St. Christoph.

Folgt man von Yverdon der grossen Strasse nach Grandson und schwenkt dann westwärts nach Montagny ab, so hat man vor sich die vom Gletscher gemodelten Molassehügel von Montagny, die oberhalb dieses Ortes nicht von gemeiner Moräne (wie Blatt XI ungenau angiebt), sondern von Kies jurassisch alpiner Herkunft (unter anderem

[1]) 30. Lieferung der Beiträge zur geolog. Karte der Schweiz, pag. 125 ff. vergl. auch «Zeitschrift der deutschen geolog. Gesellschaft» 1896.

[2]) Archives des sciences phys. et nat. 1898, p. 74.

grüne Wallisergneisse) bedeckt sind. Dahinter folgt das unregelmässige Gehügel von Essert und Peney. Häufig konstatiert man gemeine Grundmoräne mit geschrammten Alpenkalken und Serpentinen (bei 518 m, 506 m) [1]), manchmal kommt die untere Süsswassermolasse zu Tage (an der Strasse östlich Essert).

Ueberall ist der Typus länglich-runder Glacialrücken meist in Rhonegletscherrichtung vertreten, weniger der der Rundhöcker.

Diese Hügel sind in der Mehrzahl als Drumlins (Drums) zu betrachten, da zwischen den typischen Grundmoränedrums und den Drums mit festem Molassekern ein genetischer Unterschied wohl nicht gemacht werden kann.

Bei Vuitteboeuf ist gemeine Grundmoräne jurassisch-alpinen Materials ebenfalls weit verbreitet (Aufschluss der Senkgrube bei der Station), doch findet sich kein Anhaltspunkt für ein junges von Ste Croix kommendes Juragletscherchen, nur die flache schüsselförmige Depression unterhalb des Ortes deutet allenfalls darauf hin, dass hier einstmals eine Gletscherzunge lag.

Wir begeben uns nun nach Baulmes, um zu untersuchen, ob dort aus der Nische der Aiguilles de Baulmes ein Gletscher sich herauserstreckte. Bemerkenswert sind auf dem Wege dorthin die Rhonelängsmoränenwälle bei Sagnes, ferner südlich von Rauliauses (viel Quarzit), besonders aber der ein paar 100 m lange Moränenwall in Rhonegletscherrichtung an der Strasse bei Priolaz vor Baulmes (Fig. 1).

Figur 1.
Theil des Kiesrückens (Kame) bei Baulmes im Längsschnitt. 1. Kies, 2. Sand.

Derselbe ist in den Konturen sehr unruhig, ähnlich aneinander gereihten Maulwurfshügeln. Die Kies- und Sandschichten sind merkwürdig gestaucht, im allgemeinen anticlinal in Längsrichtung. Viel Jurakalk, Serpentin, Quarzit, ferner Alpenkalk, Granit und etwas geschrammtes Material in den weniger gewaschenen Lagen. Ich glaube, dass hier eine sandige Grundmoräne vom Typus der Kames oder Åsar vorliegt Eine Parallelmoräne liegt auf der anderen Strassenseite.

[1]) Blatt 286 des Siegfriedatlas.

Der starke Bach la Baumine biegt, bei Baulmes aus dem Jura kommend, schroff um und läuft, anstatt geradeaus, an 3 km weit dicht an der Jurakette zwischen den oben erwähnten Moränen und der Moräne von Bossenay, in einer echt glacialen breiten Rinne, hin, die sich nach Süd bis an die Marais de Rances fortsetzt.

Aehnlich wurde der Arnon bei Vuittebœuf abgelenkt. Es ist möglich, dass solche Bäche an subglacialen Kames (Asar) eine andere Richtung erhielten oder selbst solche erzeugt haben.[1])

Ueberall beobachtet man bei Baulmes stramme Rhonerichtung der Moränen, keine Endmoräne eines Juragletschers, wiewohl das Material gestopft voll jurassisch ist. Aus diesem Umstand allein dürfen wir aber nicht auf jurassischen Vorstoss schliessen, denn es ist bei der Nähe des Jura begreiflich, dass hier die Rhoneseitenmoränen vorwiegend lokalmoränischen Charakter annahmen. Für das Folgende sei angeführt, dass es schwer hält, den Prozentsatz alpinen Materials ohne sorgfältige Zählungen, die ich bei dieser Orientirungstour nicht vorgenommen habe, abzuschätzen. Man kommt leicht dazu, das Alpine zu überschätzen, weil es mehr in die Augen fällt.

Von Baulmes die genannte Glacialrinne kreuzend, gelangen wir auf der Strasse nach Rances zum cretacischen, glacial abgeschliffenen, mit Blöcken (6 grössere bei Chaux, darunter Granit und Serpentin) und dünnem Moränenüberzug bekleideten Hügel von Pipeschat. Dann, in der Richtung von Rances absteigend, schauen wir in das 3 km lange glaciale Trockenthal Rances-Châtillon hinein und kommen dann zu dem von Schardt als jurassische Endmoräne angesprochenen Wall, der in direkter Linie $^1/_2$ Stunde von der Jurakette entfernt ist.

Figur 2.
Kiesrücken (Kame) des alten Rhonegletschers bei Rances im Querschnitt.
1. Sand. 2. Kies.

Dieser Wall ist 1 km lang (wenn Punkt 505 m dazu gerechnet werden kann, noch länger), hat unruhige Kontouren, aber geradlinigen

[1]) Vergl. die Beobachtungen von Russel am Malaspinagletscher (Alaska).

Verlauf. Material massenhaft jurassisch, mit starkem alpinem Prozentsatz (Granit, Alpenkalk, Serpentin, Quarzit, Gneiss etc.). Viel Sand und feiner Kies. Mit einiger Mühe wurden 5 geschrammte Serpentine aufgetrieben.

An einer Stelle hat die Kiesgrube den erodierten Kern von Sandschichten entblösst (Fig. 2), auf dem der fluvioglaciale Schotter diskordant liegt. Hiernach kann ich die Lokalendmoräne eines jurassischen St. Croix-Baulmesgletschers hier nicht finden, sondern nehme einen Kiesrücken (Kame) des Rhonegletschers an.

Der Gehalt an Juramaterial kann nicht auffallen, nachdem sich 2 ½ Stunde weiter südlich die Kette des Mont Tendre so weit vorschiebt; für obige Deutung spricht ferner der geradlinige, nicht hufeisenförmige Verlauf, das Fehlen der zugehörigen jurassischen Seitenmoränen, die ganz vorwaltend fluvioglaciale Zusammensetzung, der ganze Charakter der Glaciallandschaft zwischen hier und Baulmes, welcher augenscheinlich der Rhonegletscher sein Gepräge aufgedrückt hat.

Oestlich von Mathod in der Ebene zeigte uns Schardt früher noch eine Kiesgrube mit unten viel grobgeschichtetem, jurassischen Material, oben mit grossen eckigen Rhonegletscherblöcken (auch Molasseblöcke). Ich glaube nicht, dass hier die fluvioglaciale Ablagerung eines jurassischen Val-de-Traversgletschers vorliegt. Nähere Untersuchung müsste feststellen, ob hier vielleicht alte Juragletschermoräne, überlagert von jüngerem Rhoneschutt, angenommen werden könnte, oder ob es sich nur um 2 Phasen des Rhonegletschers handelt.

b. Exkursion: Chanélaz, Bôle, Boudry, Cortaillod.

Auch bei dieser Exkursion leitete mich die Absicht, die Frage der Juragletschervorstösse zu prüfen, Kames, Drumlins, interglaciale Ablagerungen nachzuweisen, sowie Blatt XI bezüglich der Glacialablagerungen zu kontrollieren.

Südlich Colombier liegt der rebenbekränzte Hügel von Vaudijon, dessen regelmässig länglich-runde allseitig abfallende Form glacialen Ursprung verrät. Einen Aufschluss finden wir auf der Nordostseite: viele wechselnde Lagen von lockerem Sand, Kies und wenig Mergel, der Kies alpin-jurassischen Ursprungs. Lokal ist Diagonalschichtung entwickelt; ich fand nur ein Stück mit Schrammen. Ueber die Deutung bin ich nicht ganz schlüssig geworden. Ich habe an ein Kame und an eine alte Deltabildung der Areuse gedacht.

Figur 3. Moräne des alten jurassischen Val-de-Traversgletschers bei Bôle.

Westlich von Colombier liegt der kleine Ort Bôle. Begeben wir uns zur Station Colombier, so haben wir in der Richtung auf jenen Ort eine cirka 600 m lange Moräne vor uns (Fig. 3), die auf den ersten Blick wegen der auffallenden Richtung nach Südsüdost den Eindruck einer Jura-Seitenmoräne macht. Wiewohl die Weinlese in vollem Gang ist, lässt sich auf der Südseite gemeiner Moränenboden mit vorwaltendem jurassischen Material feststellen. In kleinerer Proportion treten Alpenkalk und walliser Gneisse, Quarzit und Serpentin auf. Gekritzte Serpentine und Alpenkalke sind nicht selten.

Dass hier kein Molasserücken mit dünnem Moränenbeleg vorliegt, ergiebt sich auf der Südseite im Eisenbahneinschnitt; eine Endmoräne des Rhonegletschers ist durch die nach Süden konvexe Form ausgeschlossen. Nach Süden besitzt die Moräne noch eine Stufe, sodann fällt sie gegen das glaciale Trockenthälchen «La Combe» ab, welches von der Eisenbahn auf einem Damm überschritten wird. Jenseits La Combe befindet sich noch ein guter Moränenaufschluss von gleichem Charakter, wo das Vorwiegen des Jurakalkes gegenüber dem alpinen Material (wenig Alpenkalk, Granit, einige grosse eckige Gneissblöcke) deutlich hervortritt. Geschiebe rund und kantenrund.

Begeben wir uns von hier über

Troisrods zur Station Boudry, wo uns Schardt einen schönen Aufschluss im Eisenbahneinschnitt als glacialjurassisch bezeichnete. Der erste Eindruck war mir damals mehr der von Rhoneablagerung. Die genauere Untersuchung ergab eine auf flachem Gehäng ohne Wallformen abgelagerte fluvioglaciale Bildung, bestehend aus:

1) 1 m Dammerde;

2) 2 m grober, ungeschichteter Glacialschotter mit viel eckigen und kantenrunden, bis zu $^1/_2$ cbm grossen Blöcken in sandigem Bindemittel. Material jurassisch mit starkem alpinem Prozentsatz von Granit, Gneiss, Quarzit, Alpenkalk, Euphotid, Serpentin, Kalknagelfluh etc.;

3) darunter $2\,^1/_2$ m ungeschichteter oder schlecht geschichteter feinerer Schotter ohne grosse Blöcke, stärker jurassisch, sonst gleich wie 2). Bindemittel kiesig. Schrammen selten auf Serpentin und Alpenkalk.

Gegenüber dieser Stelle liegt eine andere entsprechende, nur zeigt sich Discordanz zwischen 2 und 3 ohne Erosionsfläche. Ein dritter ähnlicher Aufschluss liegt auf dem Champ creux.

Hiernach handelt es sich um einen grossen alten Gletscherboden, der in seiner Grundlage jurassischen Charakter hat und demnach wohl mit einem alten Gletscher des Val Travers in Verbindung gebracht werden kann. Da das Val Travers zur grossen Eiszeit von Rhonegletschermaterial erfüllt wurde, so kann der obere Schotter gleichfalls eine Ablagerung des Juragletschers mit rückverfrachtetem Rhonegletschergeschieb sein. Ausgeschlossen ist allerdings nicht, dass Rhonegletscherablagerung vorliegt, die sich ohne zeitlichen Unterbruch auf die Juraablagerung legte. Jenes ist mir in Verbindung mit der Moräne von Bôle wahrscheinlicher.

Wenn wir nun auf das rechte Ufer der Areuse übersetzen, so haben wir hier eine auf Blatt 308 des Siegfriedatlas angedeutete flache Erhebung, die in 513 m kulminiert und aus gemeiner Grundmoräne besteht. Material jurassisch, wenig alpines, Schrammen zahlreich.

Das Erosionsthal der Areuse ist in Mergel, Kalk und Sandsteine der unteren Süsswassermolasse mit Süsswasserschnecken eingeschnitten. 25 m über Boudry beginnt aber schon die typische, thonige, gemischte Grundmoräne, die hier eine beträchtliche Mächtigkeit aufweist. Die Schrammen sind auf den Jurakalken weniger gut wie auf den Alpenkalken erhalten. Die Gehänge von Les Rossets bei Boudry zeigen glaciale Reliefformen.

Unser letztes Ziel sind die Moränen beziehungsweise Drumlins des weinberühmten Cortaillod. Wohl möglich, dass sie Molassenkerne mit dickem glacialem Ueberzug darstellen. Jedenfalls ist der Kern glacial gemodelt. Wir zählen 3 solcher Längsrücken. Einer läuft von Les Rochettes gegen die Höhenquote 510 m, der andere östlich davon, der dritte ist der Hauptzug und geht von Mont de Pitié bis 508 m, ja bis über das Dorf Cortaillod hinaus. Er ist nur an einem Punkt etwas tiefer aufgeschlossen, ohne dass Molasse zum Vorschein kommt. Diese Cortaillodmoräne ist jurassischen Materiales mit einzelnen alpinen Geschieben: Quarzit, Alpenkalk, Diorit, Gneiss, Glimmerschiefer, Glimmerquarzit; auch grössere aufgesetzte Blöcke fehlen nicht. Bindemittel lehmig. Stellenweise ziemlich viel gekritztes Material.

Wollte man sich nach dem Material richten, so müsste man hier die Ablagerung eines jurassischen Seitengletschers annehmen; dem widerspricht aber der Verlauf von Süd nach Nord; man sieht also, dass man in dieser Gegend nach dem Material allein die Provenienz eines Gletschers nicht herleiten darf, dass vielmehr zur Bestimmung derselben der Verlauf der Wallmoränen wichtiger ist.

Steigen wir von Mont de Pitié nach Chanélaz herunter, so liegt uns ein altes interglaciales Delta der Areuse vor Augen. Dasselbe ist an mehreren Stellen am Promenadenwaldweg, oberhalb der Pension Chanélaz, aufgeschlossen, desgleichen abwärts gegen den Bach zu.

Der Hauptaufschluss zeigt mit SW 12° Süd streichende Kies- und Sandschichten, die mit 20° SO fallen. Material ganz jurassisch mit nur vereinzelten alpinen Geschieben, hier nicht verfestigt, dagegen weiter unten hinter der Pension zu Nagelfluh verkittet. An einer andern Stelle bemerkt man geschichteten, röthlich gebänderten Sand, auf dem ein sehr feiner lössähnlicher Kalkstaub aufliegt.

Dieses Delta wird von jüngerer Grundmoräne bedeckt, ist also älter.

Vergleichen wir mit diesen Befunden die geologische Karte Blatt XII, so erweist sie sich mit Bezug auf das Glacial als sehr unvollkommen. Die Moränen von Bôle, Cortaillod sind als geschichtetes Quartär, das erwähnte Delta dagegen gar nicht verzeichnet. Die Unterscheidung von geschichtet und ungeschichtet ist überhaupt unzulänglich, denn in ersterem können interglaciale, glaciale und postglaciale Bildungen stecken, beide Ausbildungen kommen sowohl bei flachliegender Moräne wie bei Wällen vor und sind oft ganz verschiedenen Alters.

Resumé.

Für einen von der Aiguille de Baulmes oder den Gorges de Covatannaz zu einer Zeit vorstossenden Juragletscher, als der Rhonegletscher seinen letzten Rückzug antrat, ist kein genügender Beweis vorhanden. Dagegen stiess ein aus dem Val-de-Travers kommender Juragletscher, verstärkt durch ein von Rochefort kommendes Gletscherchen, noch kräftig vor und warf die Ufermoräne von Bôle auf. Stationär verhielt er sich nicht, wie aus der fehlenden Endmoräne hervorgeht.

Bedeckt von jüngerer Moräne liegt bei Chanélaz, östlich von Boudry, ein interglaciales Delta der Areuse, welches aus schrägen mit 20 ° SO zu Ost fallenden unten zu Nagelfluh verkitteten Schichten besteht. Die Areuse war also in der zweiten Interglacialzeit schon tief eingeschnitten.

Der Nachweis von mit Bezug auf den Rhonegletscher postglacialen Juragletschern kann nicht allein durch vorwaltende Jurageschiebe geliefert, sondern muss in erster Linie durch End- und Ufermoränen geleistet werden.

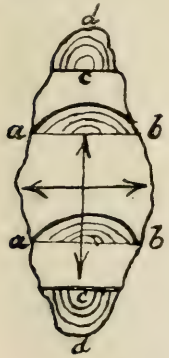


Fig. 4.
Schema eines Kiesrückens (Kame). Die Pfeile deuten den Schichtenfall an. a b Querprofil, c d Horizontalschnitt.

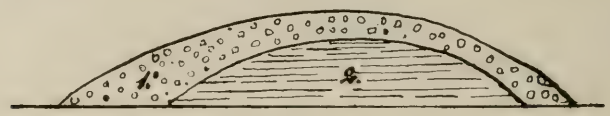
Im Rhonegletschergebiet kommen anticlinal geschichtete Kies- und Sandwälle vor, die wahrscheinlich unter Eis sich gebildet haben (zum Theil vielleicht zwischen den Eiszungen gelappter Gletscherenden). Sie haben die Richtung des alten Gletschers und sind Produkte der letzten Vergletscherung. Glacial entstandene Thälchen liegen in der Nähe. Beispiele bei La Priolaz (östlich von Baulmes) und nördlich von Rances. Figur 4 giebt ein Schema. Sie sind den Kames von Schottland, Nordamerika und den Åsar von Skandinavien und Finnland zuzurechnen. Dieser für unsere alten Gletschergebiete neue Moränentypus ist von den «Drums» (Grundmoränenrücken) durch Material und Schichtung unterschieden.

Man vergleiche die Schilderung der nordamerikanischen Kamesvon Lewis [1]), und man wird finden, dass mit Bezug auf Material, Richtung und anticlinale Schichtung Uebereinstimmung herrscht. Vergleiche auch Geikies [2]) Ausgaben.

[1]) H. C. Lewis: Report of terminal Moraine of Pensylvania etc. pag. 3,5 36, 61, 190 und besonders Tafel III und XV.

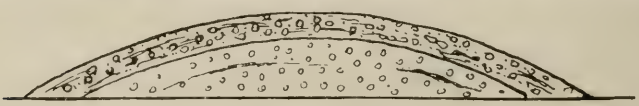
[2]) „Ice age“ pag. 180 ff., Fig. 47 und 48, pag. 746.

Drumlins, besonders in der Form etwas länglich gestreckter rundlicher Hügel mit Grundmoränebedeckung, sind in der untersuchten Gegend zwischen Colombier und Baulmes ziemlich häufig (Montagny, Baulmes, St. Christoph, Boudry, Bevaix). Sie sind jedoch nirgends so charakteristisch geschart, wie dies auf der Bodanhalbinsel, bei Friedrichshafen und Lindau vorkommt.



Figur 5.
Schema eines asymetrischen Drumlin im Längsschnitt mit Kern.
1. Grundmoräne, ungeschichtet, 2. Anstehendes.

Ich rechne ausdrücklich dazu auch die Molassehügel mit Drumform und dünner Moränenbedeckung, da sie von Grundmoräne-Drums



Figur 6.
Schema eines symetrischen Drumlin im Längsschnitt mit spurweis geschichtetem Grundmoränenkern und Kieshülle.

genetisch nicht zu trennen sind, d. h. ebenfalls unter dem Eis gebildet wurden. Die Figuren 5 und 6 stellen schematisch Drumlinstypen, wie ich sie im Gebiet des Rheingletschers[1]) und Rhonegletschers beobachtete, dar.

Rundhöckerformen, genetisch von den genannten Drums nicht zu unterscheiden, sind häufig. Der Chamblon bei Yverdon ist ein Beispiel im Grossen.

Alte glaciale Trockenthäler sind manchmal deutlich nachweisbar, z. B. «La Combe» bei Boudry, ferner bei Rances, sowie längs dem Jura.

2. Bruchüberschiebung in einer Wallmoräne des alten Aargletschers bei Bern.

Zwischen Bern uud Gümlingen wurde dicht an der Strasse in einer geschichteten Wallmoräne (Endmoräne) von sandiger Facies und mit gekritzten Geschieben eine Kiesgrube angelegt, welche beifolgendes Bild einer echten Bruchüberschiebung entblösste.

[1]) Mitteil. der bern. nat. Ges. 1898.

Ueberschiebung in einer Endmoräne bei Bern.

_____ Ueberschiebungsebene. Der Pfeil giebt die Stossrichtung des Gletschers an.

Mein Assistent, Herr Dr. Hugi, war so freundlich, die photographische Aufnahme zu machen.

Die an den Seiten durch Striche markierte etwas gekrümmte Ueberschiebungsfläche ist unter cirka 10° nach SO geneigt. Die sandig-lehmigen Schichten (im Lichtdruck dunkel) führen gekritzte Geschiebe von Aargletscher-Material und sind an den trockeneren, kiesigsandigen Schichten (im Lichtdruck hell) um mehrere Meter verschoben, so zwar, dass der rechtsseitige Komplex über den linksseitigen hinaufgeschoben erscheint (am deutlichsten im festeren Lehm zu beobachten). In der Mitte der Figur greifen lehmige und sandige Schichten zackig ineinander ein, wodurch wohl die Ueberschiebung ihren Abschluss fand.

Diese Ueberschiebung, in der Richtung von SO nach NW, entspricht durchaus der durch den Pfeil angedeuteten Bewegungsrichtung des alten diluvialen Aargletschers.

3. Neue Bergmoränenaufschlüsse auf dem Gurten (859 m) bei Bern.

Die jüngst eröffnete elektrische Bahn auf die Gurtenhöhe hat Veranlassung zu neuen geologischen Aufschlüssen gegeben, woraus sich noch deutlicher als bisher ergiebt, dass das eigentümlich wellige Plateau des Berges eine Decke von Grundmoräne besitzt, die zwischen wenigen Fussen und circa 8 Metern schwankt. Insbesondere wurde beim Bau des neuen Hotels sandig-lehmige Grundmoräne von wechselnder Mächtigkeit mit viel Molasse- und wenigen alpinen Geschieben (Gneisse, Quarzit, Verrucano, einzelne geschrammte Alpenkalke) aufgedeckt.

Wo die Molasse unter der Moräne beginnt, ist sie zunächst auf eine Tiefe von circa 1½ m merkwürdig gespalten und in grosse Blöcke getheilt.

Dieselbe Moräne giebt nun einen Masstab für die Eiserosion an diesem exponierten Punkte, denn sie ist fast nur Lokalmoräne der Molasse in loco, ihr Material ist vorwiegend Molassesand. Man kann wohl ihrer Dicke von 6 m die Dicke der wegerodierten Sandsteinschicht an einem so exponierten Punkte ungefähr gleichsetzen. Dies stimmt mit meinen früheren Angaben [1]), wonach die Dicke der sandigen Grundmoräne in der Gegend von Bern, soweit beobachtet, einige Meter bis gegen 10 m beträgt.

---

[1]) Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz, Lfg. 30 pag. 113.

Es scheint also, dass die Annahme geringer Beträge für Eiserosion (nach Heims Gletscherkunde) der Wirklichkeit nicht entspricht, noch weniger die Annahme exorbitant hoher Beträge nach Penck.

4. Kame- oder åsarartiger Kiesrücken bei Lindau.

In seiner trefflichen Schilderung der Drumlinlandschaft der Bodenseegegenden beschreibt Früh [1]) keine åsarartigen Kiesrücken. Ich theile daher hier eine Beobachtung mit, die ich gelegentlich eines Besuches des bekannten Aussichtspunktes Hoyrerberg bei Lindau machte.

Dieser Berg selbst ist ein Drumlin, vielleicht mit Molassekern. Rheingletschermoräne bildet die Oberfläche, hie und da findet sich ein gekritztes Geschieb. Länge des Rückens einige 100 m, Streichen OSO in Rheingletscherrichtung, steilerer Abfall mit 16° auf der Stoossseite, zu 9° auf der Leeseite. In der Umgebung, besonders in nördlicher Richtung, sieht man an 10 weitere Drums.

Die schöne Bodenseekarte 1:50000, mit Curven, lässt erkennen, wie die Drums im Norden von Lindau zwischen den Flüsschen Argen und Laiblach zu Dutzenden auftreten und radialstrahlig verlaufen. Wohl werden manche von ihnen einen Kern von Ausstehendem haben, ohne dass es deswegen bezüglich der Genesis nötig ist, einen Unterschied zu machen.

Südlich des Hoyrerberges bei Bad Schachen liegt nun aber ein Rücken anderer Art, vortheilhaft durch eine Kiesgrube aufgeschlossen. Er ist äusserlich auf 3 Seiten deutlich als Rücken ausgeprägt, länger als breit, vom Längsende her so aufgeschlossen, dass im Querschnitt sowohl wie an den stehen gebliebenen Rändern im Längsschnitt antiklinaler oder domförmiger Schichtenbau hervortritt.

Material der unter cirka 40° geneigten Schichten Kies (alpin) und Sand; darüber ist diskordant flachantiklinal Kies gelagert. Gerölle nicht über wallnussgross.

Erosion ist durch den Schichtenbau ausgeschlossen; ein postglaciales Delta wohl auch, es müsste ein von Süden her kommender Fluss angenommen werden, für den so nahe dem See kein Raum ist; gegen Drumlin spricht endlich die abweichende Richtung und das Material des Hügels.

---

[1]) Die Drumlinslandschaft etc. Jahresbericht der st. gallischen naturforschenden Gesellschaft 1894/95.

Das Wahrscheinlichere ist, dass hier ein «Kame» vorliegt und dass sich dieser Fall an die drei von mir[1]) früher aus der Gegend von Konstanz geschilderten anschliesst.

Die hier gegebene Beschreibung eines einzelnen Kame erscheint vielleicht unnöthig, da es deren ja in Nordamerika Tausende in den Kameslandschaften giebt. Allein, abgesehen davon, dass bei uns, soviel ich weiss, Kames noch nicht beobachtet waren, so ist nun dargethan, dass aus dem Fehlen von Kames und Drumlins kein absoluter Unterschied zwischen alter, alpiner und ausseralpiner Vergletscherung hergeleitet werden kann, es handelt sich nur um quantitative Differenzen.

Auch unsere Kames und Drums möchte ich, wie es Geikie, Lewis, Chamberlin in anderen Gebieten thaten, für subglacial gebildete Moränen halten. Wo der Gletscher am Ende gelappt war, konnten sie wohl auch zwischen den einzelnen Gletscherzungen entstehen. Jene möchte ich für Ablagerungen der subglacialen Gletscherströmungen, diese als das Produkt der Eispressung und Eiserosion ansprechen.

---

[1]) Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern 1898.

Walther Volz.

Die Verbreitung einiger Turbellarien in den Bächen der Umgebung von Aarberg.

(Mit einer Karte)

In unsern fliessenden Gewässern finden sich hauptsächlich 4 Arten von Strudelwürmern, welche alle zu den Tricladen gehören; es sind dies Dendrocoelum lacteum, Planaria gonocephala, Planaria alpina und Polycelis cornuta. Sie sind nicht ausschliesslich Bachbewohner, sondern kommen gelegentlich auch in stehenden Gewässern vor. Mit Vorliebe wird die Unterfläche von Steinen, Blättern und Holzwerk als Wohnsitz gewählt. Bei den Untersuchungen, die ich während der Herbstferien 1898 anstellte, berücksichtigte ich nur die 3 letztgenannten Arten, weil sie mit einer gewissen Gleichmässigkeit verbreitet sind, während Dendrocoelum lacteum sich nach keiner der übrigen Arten richtet und überhaupt mehr ein Bewohner des stehenden Wassers ist. Um zu weitern Beobachtungen über die Verbreitung der 3 Arten anzuregen, lasse ich im Folgenden eine kurze Beschreibung folgen:[1])

1. **Planaria gonocephala** Dugès. (Fig. 1).

Fig. 1.

Sie ist die grösste der europäischen Planariaarten. Ihre Länge beträgt bei geschlechtsreifen Exemplaren 15—25 mm. Wie alle Glieder der Gattung Planaria, besitzt sie 2 schwarze Augenpunkte, von denen jeder am Innenrande eines weissen Fleckes liegt. Der Kopf (wenn es überhaupt gestattet ist, diesen Ausdruck zu gebrauchen) hat pfeilförmige Gestalt, und die Fühler stehen hinter den Augen. Der Umriss des Körpers ist nach den Contraktionszuständen der Muskulatur sehr wechselnd. Die Seitenränder verlaufen im vorderen Teil gewöhnlich parallel. Der

[1]) Die Beschreibungen entnehme ich zum Teil der Arbeit von W. Voigt. Die Einwanderung der Planariaden in unsere Gebirgsbäche. — Verhandlg. d. naturhist. Vereins d. preuss. Rheinlande. Westfalens u. d. Reg. Bez. Osnabrück. 52. Jahrg. 1895.

Schwanz ist ziemlich scharf zugespitzt. Die Farbe des Körpers ist auf der Rückenseite dunkler als am Bauch, hier hellbraun, dort dunkelbraun bis grünlich-schwarz. Die Mundöffnung liegt ventral, in der Mitte zwischen dem vordern und hintern Ende, oder dem letztern mehr genähert. Der Pharynx kann ausgestülpt werden, die vielen, blindsackartig abgeschlossenen Verästelungen des Darmes können leicht wahrgenommen werden, wenn man das Tier in einem Glasgefäss gegen das Licht hält. Zwischen Mund und hinterem Körperende münden die Geschlechtsorgane und zwar die männlichen und weiblichen in einer gemeinschaftlichen Öffnung. Die Eier, 10 bis 50 an der Zahl, werden in einem Cocon von rotbrauner Farbe und kugeliger Gestalt abgelegt. Ein Cocon misst $1^1/_2$—$2^1/_2$ mm im Durchmesser und ist mit einem kurzen Stielchen versehen, mit welchem er an der Unterseite von Steinen etc. befestigt wird.

2. **Planaria alpina** Dana. (Fig. 2).

Die zwei kurzen Fühler stehen vor den Augen, der Kopf ist vorn nicht zugespitzt, sondern fast so breit, wie der übrige Körper.

Fig. 2.

Ausgewachsene Tiere messen 12—15 mm in der Länge. Die gewöhnliche Farbe ist grau bis graubraun. Professor Zschokke fand in den Alpen je nach der Farbe des Untergrundes weisse, graue, braune und schwarze Varietäten. Die Cocons messen 1—$1^1/_2$ mm, sind ungestielt und werden nicht angeklebt, sondern frei auf den Boden der Gewässer abgesetzt. Was die Form des Körpers etc. anbelangt, so gilt das für Planaria gonocephala gesagt.

3. **Polycelis cornuta** O. Sch. (Fig. 3).

Die Gattung Polycelis besitzt eine grosse Anzahl von Augen, welche in etwas unregelmässiger Reihe den ganzen Vorderrand des

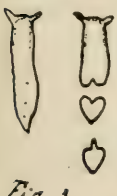


Fig. 3.

Körpers umsäumen. Polycelis cornuta hat deren ungefähr 80 bis 100. Ihre Zahl nimmt mit dem Alter des Tieres zu. Der Kopf sieht ähnlich demjenigen von Planaria alpina, hat aber etwas längere Fühler und der Vorderrand des Kopfes ist in der Mitte mehr nach vorn gewölbt. Sobald das Tier auf einen Widerstand stösst oder berührt wird, werden die Fühler rasch eingezogen. Ausgewachsene Tiere messen 15—18 mm in der Länge.

Die Färbung ist chocoladebraun bis lehmgelb. Bei der Verena-Einsiedelei bei Solothurn fand ich ein weisses Exemplar, dessen Fühler braun gefärbt waren.

Auf den ersten Blick sind manchmal Planaria alpina und Polycelis cornuta nicht zu unterscheiden; dann wird aber die Besichtigung mit einer starken Lupe bald zeigen, ob nur 2 oder ob mehrere Augenpunkte vorhanden sind.

Über die geschlechtliche Fortpflanzung von Polycelis cornuta wissen wir nicht sehr viel. Oskar Schmidt[1]) erwähnt ganz kurz, dass sich ihre Cocons von denen anderer Planariaden nicht unterscheiden. Eine weitere Angabe verdanken wir dem bekannten Erforscher der Süsswasserfauna, Zacharias.[2]) Er schreibt: „Bei einer Identifizierung der in Frage kommenden Arten stösst man auf grosse Schwierigkeiten. Ich traf eine „gehörnte" Planarie in einem kleinen Bache des Isargebirges an, die, dem äusseren Ansehen nach, vollkommen mit Polycelis cornuta O. Sch. übereinstimmte. Aber diese Dendrocoele besass keine Geschlechtsorgane, sie pflanzte sich in meinem Glasbassins ausschliesslich durch Querteilung fort. Ihre Identität mit der von Schmidt beschriebenen Form ist also sehr problematisch." Hierauf beschreibt Zacharias den Vorgang der Querteilung und fährt dann fort: „Die Teilungsprozesse hören aber ganz und gar auf, wenn man die Tiere spärlich füttert oder gar hungern lässt. Auch die Jahreszeit scheint dabei von Einfluss zu sein. Gegen Ende August dem betreffenden Bach entnommene Exemplare zeigten auch bei guter Fütterung die Querteilung nicht mehr. Dafür entdeckte ich aber zu meinem Erstaunen geschlechtlich differenzierte Exemplare unter denselben und es scheint somit, dass die Fortpflanzung durch Querteilung nur während der Sommermonate stattfindet. Dugès erwähnt nichts davon, dass er die gleiche Beobachtung gemacht habe, aber er sagt, dass ihm im Herbst ganz kleine Individuen von Planaria subtentaculata (welche wohl mit Polycelis cornuta identisch ist) zu Gesicht gekommen seien, und er macht bezüglich dieser die Bemerkung[3]): „C'est cependant surtout dans la dernière de ces

[1]) Zeitschr. f. wiss. Zoologie 1858.

[2]) Zacharias, O. Uber Fortpflanzung durch spontane Querteilung bei Süsswasserplanarien. — Zeitschr. f. wiss. Zoologie 1886.

[3]) Dugès, A. Recherches sur l'organisation et les mœurs des Planariés — Annales d. sciences naturelles, série, I. XV. 1828.

saisons (nämlich im Herbst) que j'ai trouvé en abondance des tronçons avec un commencement de reproduction des parties qui leur manquaient à la même époque, j'ai trouvé des individus bien proportionés et longs quelquefois seulement d' une ligne et demie. Les individus ne pouvaient avoir une pareille origine; des œufs, sans doute, leur avaient donné naissance." Mit anderen Worten heisst das: es müssen zur Herbstzeit Eier producierende, resp. geschlechtlich differenzierte Individuen vorhanden sein und diese habe ich unter Händen gehabt. Dugès' Vermutung hat sich also voll bestätigt." Soweit Zacharias.

Ich habe nun im Juli des Jahres 1898 in der Nähe von Neuenburg einige Exemplare von Polycelis cornuta gefunden, die gemeinschaftlich mit Planaria alpina die Unterseite von Steinen in einem kleinen Bache bevölkerten. Dieselben hatten ein wohlgenährtes, ich möchte fast sagen, fettes Aussehen. Herr Dr. Fuhrmann hatte mich darauf aufmerksam gemacht, dass die Anatomie der Geschlechtsorgane von Polycelis cornuta histologisch noch nicht bekannt sei, und so nahm ich denn diese Exemplare mit. Angefertigte Schnittserien zeigten mir sogleich, dass meine Vermutung, die Tiere möchten geschlechtsreif sein, wohl begründet war. Die zu beiden Seiten des Körpers gelegenen, folliculären Hoden waren in voller Thätigkeit, Spermatozoen zu erzeugen, die Vasa deferentia und die Vesiculae seminales strotzten von solchen. Auch der Penis war entwickelt. Zu meinem Erstaunen fand ich aber keine Spur von weiblichen Geschlechtsorganen, weder von Ovarien noch von Dotterstöcken. Die Tiere waren also „Männchen". Da ich Neuenburg bald verlassen musste, hatte ich nicht mehr Gelegenheit, noch ältere Entwicklungsstadien zu untersuchen, bei denen sich auch die weiblichen Drüsen angelegt haben würden. Die Proterandrie ist also bei Polycelis cornuta sehr stark ausgeprägt, wie bei einigen Cestoden.

Die gewöhnliche Fortpflanzungsweise von Polycelis cornuta geschieht auf ungeschlechtlichem Wege durch Querteilung. Der Vorgang wird von Zacharias in der schon erwähnten Arbeit genau beschrieben. Es entsteht zuerst hinter der Mundöffnung mitten durch den Körper hindurch ein Loch, nun erst lösen sich nach und nach auch die Seitenränder ab. Im Gegensatz hiezu beschreibt Voigt[1])

[1]) W. Voigt loc. cit.

„dass hinter der Mundöffnung eine ringförmig den Körper umfassende Einschnürung auftritt, die immer tiefer einschneidet, bis das Hinterende dadurch völlig abgetrennt wird. Die frische Wundstelle am Körperende des durch Selbstamputation verkürzten Tieres wird etwas nach innen eingezogen, sie vernarbt schnell und das verloren gegangene Stück ersetzt sich bald wieder durch Neubildung.“ — Die von mir beobachtete Querteilung ging so vor sich, wie es Zacharias beschrieben hat. Wurde eine Nadel durch das mitten durch den Körper gehende Loch gesteckt, so kam es sehr oft vor, dass durch die Bewegung des auf diese Weise festgehaltenen Tieres die hintere Partie abgerissen wurde. Beide Teilstücke haben an der Teilungsstelle einen kleinen Ausschnitt, so dass sie hier herzförmig aussehen. Das hintere Stück bleibt erst eine zeitlang ruhig liegen; nach und nach füllt sich der herzförmige Ausschnitt aus und wächst als eine kleine Spitze nach vorn. Bald beginnen sich auch die Augenpunkte zu bilden, dann entsteht am hinteren Teile der Mund und das Tier ist wieder vollständig. Auf dieselbe Weise bildet sich auch der abgeschnürte Schwanz des Vorderteiles wieder aus. Die regenerierten Teile sind anfänglich weiss gefärbt, nehmen aber nach und nach die Farbe des übrigen Körpers an. Ob die subcutan gelegenen Pigmentzellen neu gebildet werden, oder ob sie aus dem mit solchen versehenen Teilstücke geliefert werden, kann ich nicht sagen. Sollte es sich zeigen, dass nur Ende Sommer geschlechtliche Fortpflanzung eintritt und dass sich nachher die Tiere nicht mehr fortpflanzen, so hätten wir eine Art Generationswechsel vor uns. Nach den Beobachtungen von Voigt ruht die ungeschlechtliche Fortpflanzung während der Wintermonate und alle Individuen sind zu dieser Zeit mit wiederhergestellter Hinterleibspitze versehen.

Fortpflanzung durch Teilung kommt auch bei andern Turbellarien vor. Von den in dieser Arbeit erwähnten Arten verdanken wir noch eine Angabe über Planaria alpina Zschokke[1]), welcher gelegentlich seiner Untersuchungen unserer Alpenseen diese Art sehr weit verbreitet fand. Im Lünersee fand er „junge und jüngste Tiere in Menge. Eine lebhafte, ungeschlechtliche Vermehrung schien stattzufinden.“ Borelli bestätigte später diese Beobachtung.

---

[1]) Zschokke, F. Die zweite zoologische Excursion an die Seen des Rhätikon, — Verhandl. d. naturf. Gesellschaft in Basel. IX. Bd. 1893.

Dass sich die Planarien auch künstlich vermehren lassen, dadurch, dass man sie in zwei Teile verschneidet, ist eine so bekannte Thatsache, dass ich darauf nicht näher eingehe.

Angeregt durch die interessanten Arbeiten von Voigt[1]) und mit der Absicht, dem Wunsche dieses Forschers nachzukommen, auch andere Gegenden auf die Verbreitung dieser Turbellarien zu untersuchen, unternahm ich im Laufe des Juli und August 1898 einige Excursionen in der Umgegend von Aarberg. Bevor ich auf die dabei erhaltenen Resultate eingehe, will ich erst in aller Kürze die wichtigsten Ergebnisse und Schlüsse nennen, welche Voigt aus seinen Beobachtungen gezogen hat:

Planaria alpina ist als Relikt von der Eiszeit her zu betrachten. Sie bewohnte während derselben die damals existierenden, kalten Gewässer. Als dann später nach und nach ein wärmeres Klima eintrat, zog sie sich ebenfalls mit den weichenden Eismassen zurück und bewohnt heute noch vornehmlich die Gewässer der Alpen — und Bergregion. In der Ebene findet sie sich nur in solchen Bächen und Quellen, deren Temperatur nie höher als auf ungefähr 12° C. steigt. Später wanderten dann von den Flüssen her andere dendrocoele Strudelwürmer in die Bäche ein und besetzten die von Planaria alpina geräumten Plätze.

Dies geschah zuerst durch Polycelis cornuta. Viel später, jedenfalls in historischer Zeit und wahrscheinlich noch jetzt, drang dann auch Pl. gonocephala in die Unterläufe der Bäche ein. Dass dies erst vor verhältnismässig kurzer Zeit geschah, geht aus dem Umstande hervor, dass Voigt diesen Wurm eine lange Strecke eines Baches bewohnen sah, plötzlich aber verschwand er und zwar an einer Stelle, wo ein weiteres aktives Vordringen durch ein hohes Mühlenwehr verhindert war. Ob dem Wehr fand sich keine Pl. gonocephala mehr, obschon hier die Bedingungen zum Gedeihen ebenso

---

[1]) Voigt, W. Planaria gonocephala als Eindringling in das Verbreitungsgebiet von Planaria alpina und Polycelis cornuta. — Zoolog. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr., u. Biologie der Tiere. Bd. VIII. 1895.

Voigt, W. Über Tiere, die sich vermutlich aus der Eiszeit her in unsern Bächen erhalten haben. — Verhandl. d. naturhist. Ver. d. preuss. Rheinlande Westfalens u. d. Reg.-Bez. Osnabrück. 52. Jahrg. 1895.

Voigt, W. Die Einwanderung der Planariaden in unsere Gebirgsbäche. — ibidem 53. Jahrg. 1896.

günstig erschienen, wie unterhalb des Wehres. In Bächen, in denen alle 3 Arten vorkommen, können wir gewöhnlich 5 Zonen unterscheiden: zu unterst, der Mündung des Baches zunächst gelegen, findet sich die Pl. gonocephala-Zone; weiter hinauf folgt dann ein kürzerer oder längerer Abschnitt, wo Pl. gonocephala und Pol. cornuta gemischt vorkommen; hierauf folgt das 3. Stück, hier lebt nur Pol. cornuta. In der 4. Zone ist diese mit Pl. alpina vermischt und zu oberst endlich findet sich Pl. alpina allein. Dieses Schema trifft man nur ganz selten so, wie ich es jetzt gezeichnet habe, es kommen vielmehr alle möglichen Variationen vor. Die Karten von Voigt zeigen uns, dass in einigen Bachläufen Pol. cornuta vollkommen fehlt, in andern ist Pl. alpina gänzlich ausgerottet.

Wo sich 2 Arten treffen, findet unter diesen ein Kampf statt; dies ist aber nicht im eigentlichen Sinne des Wortes zu verstehen; denn die einzelnen Tiere befeinden sich gegenseitig nicht, wie dies Voigt an seinen in der Gefangenschaft gehaltenen deutlich beobachtete. Selbst bei gänzlichem, längere Zeit andauerndem Nahrungsmangel lassen sie sich gegenseitig vollständig in Ruhe. Nur Pl. alpina scheint einen gewissen Widerwillen gegen Pl. gonocephala zu haben, indem sie bei etwaiger Berührung mit dieser zusammenzuckt. Wenn sie aber sehr hungrig und mit Fressen beschäftigt ist, lässt sie sich durch Berühren und selbst durch Überkriechen von Pl. gonocephala nicht stören.

Der Kampf ums Dasein ist also kein direkter, das Faustrecht spielt hier keine Rolle. Es kommen ganz andere Faktoren in Betracht:

1. Die Temperatur des Wassers wirkt mit, das Verbreitungsgebiet der 3 Arten zu vergrössern oder zu beschränken. Namentlich die hohe Temperatur ist hier massgebend. In Gewässern, die von der Sonne längere Zeit beschienen sind, vermag sich am besten Pl. gonocephala zu erhalten. Bei unsern Bergbächen, die hier hauptsächlich in Betracht kommen, sind die oberen Stellen meist von Wald umsäumt, auch liegen die Quellen meist in Waldungen. Hier ist deshalb das Wasser bedeutend kühler. Pl. alpina, die das kälteste Wasser liebt, wird sich deshalb besonders in den Oberläufen der Bäche finden, auch Pol. cornuta zieht kaltes Wasser vor.

2. Reinheit des Wassers. Am empfindlichsten gegen fauliges Wasser ist Pl. gonocephala, sie geht darin bald zu Grunde. An Stellen, die durch modernde Pflanzenteile verunreinigt sind, findet

sie sich nicht. Solche Plätze liegen gewöhnlich da, wo Wald die Bachufer umsäumt. Pl. alpina und Pol. cornuta scheuen sich dagegen nicht, direkt unter einer dichten Lage von moderndem Laub zu leben. Die obere Verbreitungsgrenze von Pl. gonocephala liegt deshalb meist da, wo der Wald beginnt. Stark fauliges Wasser würde aber auch für die beiden kleinen Arten tötlich wirken, wie dies an Gefangenen, deren Wasser längere Zeit nicht gewechselt ist, bemerkt werden kann. Die Tiere sitzen dann zusammengezogen stundenlang ruhig, bis der Tod eintritt, worauf sie sehr rasch zu einer schleimigen Masse zerfallen.

Wird an einer Stelle der Wald abgeholzt, so werden wenig oder keine modernden Blätter mehr in den hier fliessenden Bächen sein. Dies wäre noch kein Grund, Pl. alpina oder Pol. cornuta, die allfällig hier ihre Wohnsitze aufgeschlagen hätten, zu vertreiben, es werden aber die Aufenthaltsbedingungen günstiger für Pl. gonocephala, welche nun, wenn sie weiter unten überhaupt schon vorkommt, in den für sie günstigen Bachteil vordringt. Ist reichliche Nahrung vorhanden, so wird sie lange Zeit gemeinschaftlich mit den vorher vorhandenen Arten hier leben, macht sich aber Nahrungsmangel geltend, so tritt ein neuer Faktor auf, nämlich:

3. Die Stärke des Tieres. Pl. gonocephala vermag durch ihre Grösse auch ältere, ausgewachsene Beutetiere zu überwältigen, die den kleineren Arten entgehen würden. Dazu kommt noch bei dieser Art die Fähigkeit, einen zähen Schleim absondern zu können, mit welchem Gammarus, der hauptsächlich die Nahrung der Planariaden bildet, und andere Bachbewohner festgehalten werden können. Tritt ein sehr grosser Mangel an Futter ein, so vermag Pl. gonocephala in Folge ihrer bedeutenden Grösse auch länger zu fasten, als die beiden andern Species. Die Jungen der beiden letztern sind bei ihrer Geburt kleiner, als die von Pl. gonocephala, sie vermögen deshalb lebende Beute weniger leicht zu überwältigen, als diese. In den Oberläufen der Bäche ist die Nahrung meist spärlicher. Dies kommt bei der Fortpflanzung sehr in Betracht. Voigt erhielt z. B. aus einem Cocon einer unter gewöhnlichen Verhältnissen lebenden Pl. alpina 15—30 Junge; dem Cocon eines der Exemplare, welche er 3 Monate hatte fasten lassen, entschlüpften deren 7, dem eines der reichlich gefütterten aber 55. Daraus erhellt, dass Pl. gonocephala, welche die Unterläufe der Bäche bewohnt, also unter

günstigeren Nahrungsverhältnissen lebt, als die weiter oben vorkommenden kleineren Arten, ein grösseres Contingent von Nachkommen zu erzeugen vermag, als die beiden andern. Die jungen Planarien helfen natürlich gleich mit, die oft sonst schon spärliche Nahrung verzehren, und schädigen auf diese Weise die schwächeren Species resp. deren Nachkommenschaft. Einen weiteren Vorteil namentlich gegenüber der alpinen Art besitzt Pl. gonocephala ferner in der Art und Weise der Ablage ihrer Cocons. Wie bereits früher erwähnt, werden dieselben vermittelst kleiner Stiele an Gegenständen, die im Wasser liegen, befestigt. Die junge Brut befindet sich deshalb beim Ausschlüpfen gleich in den günstigen Wohnsitzen. Pl. alpina dagegen legt ihre Cocons nur gleich ab, ohne dieselben zu befestigen. So werden die Eier vom Wasser mitgerissen und jedenfalls oft verschleppt oder im Sand begraben oder ans Ufer geworfen, namentlich wenn die Bäche angeschwollen sind, und dies ist oft der Fall während der Fortpflanzungszeit unserer Art. Wenn Junge aus solchen weit aus den gewöhnlichen Wohnsitzen fortgeschwemmten Cocons ausschlüpfen, so sind sie im feindlichen Lager. Falls die Nahrung hier nicht spärlich und auch die übrigen Verhältnisse günstig sind, werden sie sich längere Zeit hier aufhalten können, bis sie bei eintretendem Nahrungsmangel oder veränderten äussern Verhältnissen auch zu Grunde gehen. Auf solche herabgeschwemmte Cocons wird man die manchmal mitten im Verbreitungsgebiet einer andern Art vereinzelt vorkommenden Pl. alpina-Exemplare zurückzuführen haben.[1]) Auch die Fortpflanzung durch Teilung, die ja bei Pol. cornuta eine so grosse Rolle spielt, ist

[1]) Übrigens fand Fuhrmann (Die Turbellarien der Umgebung von Basel. — Revue Suisse de Zoologie. T II [1894]), dass Pl. alpina in den Bächen von Bärschwyl jährlich Wanderungen unternimmt. Im Sommer ist sie mehr den Quellen genähert, im Winter findet sie sich weiter nach unten. Auch in England wurde eine ähnliche Beobachtung von Wanderung bei derselben Art gemacht. Voigt bezweifelt aber, dass es ein regelmässiges Wandern ist, und ich möchte mich seiner Ansicht anschliessen, da es nicht wohl denkbar ist, dass so kleine Tiere, die dazu noch schlechte Schwimmer sind, jährlich je ein Mal gegen die starke Strömmung schwimmend oder kriechend grosse Strecken zurücklegen. Dass aber Pl. alpina Wanderungen unternimmt, habe ich selbst schon beobachtet, z. B. in einer Quelle in der Nähe von Aarberg, ferner fand ich sie sowohl im kleinen Melchthal als auch auf der Arnialp (Ct. Unterwalden) an senkrechten Abstürzen, über die aber zu jener Zeit nur ein schwaches Wasseräderchen herabrieselte, hinaufkriechen; doch waren es jedenfalls nur geringe Strecken, die zurückgelegt wurden.

vorteilhafter, als die Vermehrung durch Eier. Abgeschnürte Teilstücke besitzen doch schon eine im Verhältnis zu den aus Eiern ausschlüpfenden Jungen bedeutende Grösse. Für sie ist der Kampf ums Dasein weniger herb, als für die ganz jungen.

Auch von Feinden haben unsere Tiere zu leiden. Nach Voigt ist es unter den Wirbeltieren namentlich die Bachforelle, die ihnen eifrig nachstellt. In Bächen, die diesen Fisch häufig beherbergen, werden die Planarien nicht sehr zahlreich sein. Ich vermute, dass auch die Wasseramsel, die sich noch ziemlich häufig an einsamen Bächen findet, den Turbellarien Schaden zufügt. Wie Voigt beobachtet, nähren sich auch die Larven gewisser Wasserinsekten, namentlich solcher, die unter Steinen aus Sand und Steinchen Wohnröhren bauen, von Strudelwürmern.

Ob das bis jetzt Angeführte genügt, die merkwürdige Verbreitung der 3 Tricladen zu erklären, lasse ich dahingestellt. Ich glaube aber, dass bei fortgesetzter Beobachtung, namentlich auch anderer Stellen, noch manches ans Licht gebracht wird, das bei den bis jetzt nur spärlichen Nachforschungen über die geographische Verbreitung dieser Platoden noch nicht bemerkt worden ist. Es können noch ganz andere Ursachen vorhanden sein, welche die oft frappante Begrenzung der einen oder andern Species bewirken, und man ist bei tiergeographischen Fragen oft nur zu leicht geneigt, das, was man eben gesehen oder zu sehen gemeint hat, als eigentlichen Grund zu betrachten. Darum ist es von grossem Vorteil, wenn möglichst viele am Gleichen arbeiten, so dass einer den andern ergänzen kann.

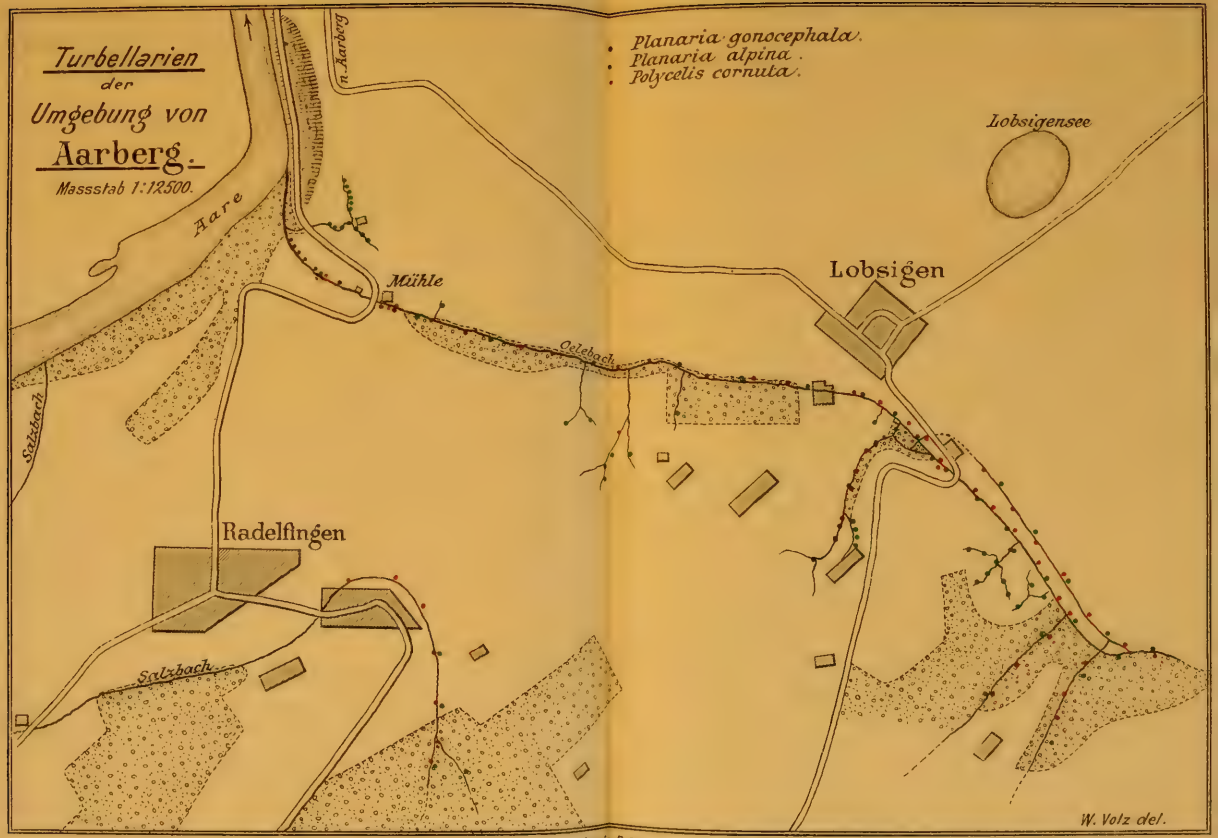
Untersuchungen über die Verbreitung der 3 Tricladenarten sind sehr leicht auszuführen. Auf meinen Excursionen bestand die ganze Ausrüstung aus einigen Fläschchen von ca. 4 cm Länge und 1 cm Durchmesser, einem grösseren, gut verschliessbaren Glas, einer Glaspipette und einer Spatel (auch das Taschenmesser kann als solche verwendet werden). Da ich auch die übrigen Bachbewohner, von denen ich etwa 40 Arten sammelte, berücksichtigte, nahm ich auch eine Pincette und Formaldehyd à 40% mit, das ich gleich beim Gebrauch soviel als nötig verdünnte. Ferner ist nötig eine Karte, in die man die Fundstellen gleich mit Farbenbleistift einträgt, sowie ein Notizbuch. Die günstigste Zeit für solche Untersuchungen sind wohl die Monate Juli und August, weil zu dieser Zeit die Tiere meist ausgewachsen sind.

Die Untersuchung eines Baches begann ich gleich bei seiner

Mündung in die Aare. Steine, Astwerk und Blätter wurden aufgehoben; die darunter sich aufhaltenden Turbellarien konnten meist auf den ersten Blick erkannt werden, namentlich, wenn es sich um völlig ausgewachsene Tiere handelte. Wo die makroskopische Betrachtung keinen sichern Aufschluss gewährte, entschied die Lupe. Nur in einigen wenigen Fällen war es nötig, zur völlig sicheren Bestimmung Tiere lebend mitzunehmen. Dies geschah da, wo sich abgeschnürte Hinterleibsenden oder nicht ausgewachsene Individuen vorfanden. Hier war die Anzahl der Augen oft nicht zu erkennen. Es findet sich ziemlich häufig, dass unter ein und demselben Stein Vertreter zweier Arten leben. Dieser Fall tritt namentlich häufig ein in den Uebergangszonen von der einen zur andern Art, aber auch da, wo versprengte Tiere sich mitten im Verbreitungsgebiet einer andern Species finden. Die zweifelhaften wurden mittelst der Spatel sorgfältig abgehoben und mit etwas Wasser in eines der kleinen Fläschchen gesteckt, mit einer Nummer, die auch auf der Karte an der betreffenden Fundstelle verzeichnet wurde, versehen und in die grosse Flasche gebracht. Dies hat den Vorteil, dass man nicht immer die kleinen Fläschchen öffnen muss, um das Wasser zu erneuern, das meist bald warm wird; man wechselt von Zeit zu Zeit einfach das Wasser der grossen Flasche. Auch an den heissesten Tagen brachte ich auf diese Weise die Tiere stets lebend nach Hause. Hier genügt es, die zu bestimmenden Exemplare auf einen Objektträger und unter das Mikroskop zu bringen, um sofort sagen zu können, mit welcher Art man es zu thun hat. Sind mehrere oder gar keine Augenpunkte vorhanden, so ist es sicher Pol. cornuta; sind dagegen 2 Augen vorhanden, so wird die Form des Kopfes leicht entscheiden, ob man es mit Pl. alpina oder mit Pl. gonocephala zu thun hat.

Ich untersuchte in der Nähe von Aarberg hauptsächlich 3 Bäche, sowie deren Zuflüsse, die sämtlich auf dem rechten Ufer der Aare münden. 2 davon haben ihre Quellen in den waldigen Höhen des Frienisbergzuges, der das Aarethal nördlich von Bern vom Aarethal des bernischen Seelandes trennt.

Ob dem Städtchen Aarberg findet sich ein ziemlich steiler, mergeliger Absturz, die sog. Rappenfluh. (Vergl. d. Karte.) Dieselbe bildet in der Mitte ihrer Höhe einen wohl künstlich geschaffenen Absatz, auf welchem die Landstrasse angelegt ist. Der über der Strasse gelegene Teil der Fluh ist an einer Stelle durch eine Stützmauer gegen das



Autogr. R. Armbruster, Bern.

Herabstürzen geschützt. In dieser Mauer ist eine eiserne Röhre eingelassen, die den Zweck hat, das Sickerwasser, das aus einem Wald, der über der Fluh steht, hinter die Mauer fliesst, abzuleiten. Dieses Wasser hat im Sommer eine sehr niedrige Temperatur, im Winter aber gefriert es sehr lange nicht; es fliesst in eine, neben der Strasse angelegte Rinne und bildet hier eine kleine Pfütze von ca. 1 m^2 Oberfläche; von hier läuft es dann rechts und links ab, um nach und nach im Boden zu verschwinden. Als ich diese Pfütze besuchte, bemerkte ich eine Unmasse schwärzlicher Tiere sich darin bewegen. Ich hielt sie zuerst für Larven von Dixa, die weiche, schleimige Consistenz belehrte mich aber, dass es nicht mit Chitin gepanzerte Tiere sein konnten, es stellte sich denn auch heraus, dass es Pl. alpina war, die hier in ganz ungeheurer Menge vorkommt. Die Tiere mochten wohl nach Tausenden zählen. Sie sassen an zufällig von der Landstrasse hereingeratenen Steinen oder schwammen frei herum. Sie waren von verhältnismässig geringer Grösse, was wohl auf Nahrungsmangel zurückzuführen war. Ein Regenwurm, den ich ihnen gab, wurde sogleich angefallen und in kurzer Zeit von einer solchen Menge von Würmern bedeckt, dass man nichts mehr von ihm sehen konnte, als die heftigen Bewegungen, mit denen er die Quäler abzuschütteln suchte, die ihn bei lebendigem Leibe auffrassen. Auch einige getötete Kaulquappen wurden gleich verzehrt. Ich besuchte diese Stelle auch während des Winters und fand die Tiere sehr wohlbehalten in ihrer engen Wohnstätte, allerdings schien es mir, als ob sie weniger zahlreich seien, als im Herbst.

Diesen Punkt erwähnte ich so ausführlich, weil er mir ein gutes Beispiel dafür zu sein scheint, dass Planaria alpina oder ihre Eier auch passiv wandern, d. h. durch Frösche oder Vögel von einer Stelle zur andern getragen werden können. Ich könnte mir sonst nicht vorstellen, wie die Würmer in diese Quelle gelangt sind. Wie bereits erwähnt, fliesst das Wasser aus dem Boden hervor, der hinter der Stützmauer gelegen ist, von oben können sie also nicht herkommen; dann versickert es im Boden, um in der unteren Hälfte der Rappenfluh da und dort wieder zum Vorschein zu kommen und sich in die Aare zu ergiessen. Von hier können die Turbellarien auch nicht stammen; denn der Fluss ist an dieser Stelle, auch bei niedrigstem Wasserstand, ziemlich tief und sehr reissend. In den stellenweise von der obern Hälfte der Fluh herabfliessenden Wasser-

äderchen finden sich keine Planarien; sie könnten sich hier auch gar nicht aufhalten, da jede Nahrung fehlt und in den Regenlachen längs des Strassenbordes wimmelt es wohl zeitweise von Fröschen und Unken, Turbellarien fehlen aber, sie würden in dem Schmutz und Schlamm gar nicht leben können. Auch der Transport oder die Wanderung bei gelegentlichem Hochwasser ist gänzlich ausgeschlossen. Endlich ist auch nicht anzunehmen, dass durch Menschen die Tiere hier eingesetzt sind. Es kann also nur der Transport durch gelegentlich wandernde Tiere in Betracht kommen und da haben wir dann in erster Linie die in der Nähe vorkommenden Frösche ins Auge zu fassen. Die nächste Fundstelle von Planaria alpina liegt ca. 200 m von der eben erwähnten Fundstelle entfernt. Es ist nun wohl denkbar, dass ein Frosch, nicht eine ganze Planarie, wohl aber einen Cocon die ganze Strecke getragen hat. Auf welche Weise dies geschah, ist schwer zu sagen, doch halte ich es nicht für ausgeschlossen, dass ein solcher zufällig mit der Nahrung in den Darm gelangen kann und es ist zu bezweifeln, dass die dicke Schale den verdauenden Säften des Digestionsapparates nicht Widerstand zu leisten im Stande ist. Letzterer Versuch könnte übrigens im Laboratorium leicht ausgeführt werden. Auch die sich gelegentlich bei diesem Tümpel herumtreibenden Bachstelzen, die von hier nach den andern Gewässern fliegen, könnten möglicherweise, sei es ein ganzes Tier, sei es einen Cocon, mitgetragen und hier abgesetzt haben.

Voigt machte Versuche, wie lange sich Planaria alpina und Planaria gonocephala ohne Wasser zu halten vermögen, und kam dabei zum Resultat, dass Planaria alpina nach 10 Minuten langem Liegen an der Luft mit dem Leben davonkommt, nach 15 Minuten geht etwa die Hälfte ein, nach 30 Minuten geben die Versuchstiere, ins Wasser zurückgebracht, zwar noch Lebenszeichen von sich, sterben aber nach kurzer Zeit ab. Planaria gonocephala zeigt sich etwas widerstandfähiger gegen Austrocknen, es kamen von ihr selbst noch Tiere mit dem Leben davon, die 30 Minuten an der Luft gelegen hatten.

Genau dieselben Versuche, wie sie Voigt ausgeführt, machte ich mit Polycelis cornuta. Die Tiere von ca. 1 cm Länge wurden mittelst einer Spatel auf trockenes Fliesspapier gelegt und sorgfältig mit einem andern Streifen Fliesspapier von dem noch an ihnen haftenden Wasser befreit. Hierauf wurden sie mit einer Glasschale

überdeckt. Anfänglich tasteten die Versuchstiere mit dem Kopf in der Luft herum, verhielten sich aber bald ruhig. Nach 10 Minuten langem Liegen auf dem Trocknen, wurden sie wieder ins Wasser zurückgebracht. Einige hatten den Pharynx ausgestülpt, den sie nun abschnürten, worauf er sich noch sehr lange selbstständig bewegte. Diese Tiere hatten alle auf dem Rücken gelegen; sie bewegten sich noch einige Zeit im Wasser, bedeckten sich aber nach und nach mit Schleim und starben dann bald ab. Diejenigen der Versuchstiere, welche mit dem Bauch nach unten gelegen hatten, fingen an, sobald sie wieder mit dem Wasser in Berührung kamen, sich zu bewegen, erst langsam und schwerfällig, dann lebhafter, blieben wieder lange Zeit mit eingezogenem Kopf liegen. Nachdem sie 4 Stunden zugebracht hatten, ohne ein Lebenszeichen von sich zu geben, wechselte ich das Wasser und bald begann die eine und die andere wieder umher zu kriechen. Am nächsten Morgen, konnte ich diejenigen, welche den Austrocknungsversuch mitgemacht hatten, von den übrigen nicht mehr unterscheiden.

15 Minuten langes Liegen an der Luft überstand keine der Polycelis cornuta. Sie gaben wohl, ins Wasser zurückgebracht, anfänglich noch dann und wann ein Lebenszeichen von sich, starben aber bald darauf. Einige lebten nach diesem Versuche noch fünf Stunden.

Nach meinen Erfahrungen würde also Polycelis cornuta die Austrocknung weniger lange aushalten können, als Planaria gonocephala, selbst weniger lange als Planaria alpina; doch müsste, um ein sicheres Resultat zu erhalten, zu gleicher Zeit und unter den gleichen Bedingungen (Temperatur der Luft) das Experiment mit allen 3 Arten gemacht werden. Aus den Versuchen von Voigt und den meinen geht aber trotzdem hervor, dass selbst erwachsene Planariaden eine Zeit lang ohne Wasser zu leben vermögen, und deshalb der Transport durch Wirbeltiere nicht ausgeschlossen erscheint.

Betrachten wir nun die Verbreitungsverhältnisse in dem etwa 200 m entfernten Mühlethalbach oder Oelebach. Gleich bei seiner Mündung fliesst derselbe noch durch ein kurzes Stück des längs der Aare stehenden Waldes. Bei meinem ersten Besuche war er stark angeschwollen und es war mir deshalb nicht möglich, ihn hier zu untersuchen. Wie es sich aber später herausstellte, fehlen dem untersten,

etwa 30 m langen Stück des Baches sämtliche Planariaden, wohl hauptsächlich deshalb, weil hier ziemlich viele Fische von der Aare her eindringen. Ich hatte vermutet, hier Planaria gonocephala, die ich zwar nur aus Abbildungen kannte, zu treffen, sah mich aber getäuscht. Um so grösser war dann die Freude, als ich gleich oberhalb des Waldes, bei einer kleinen Brücke, die gesuchte Planarie fand. Auch traf ich hier eine ganz kleine Polycelis cornuta, die wohl bei dem hohen Wasserstande heruntergeschwemmt worden war. Bei einer Besichtigung der gleichen Stelle im Winter, liess sich die letztere Species nicht mehr nachweisen, dagegen war Planaria gonocephala in gleicher Anzahl vorhanden, wie im Herbst.

Nicht weit von der Mündung des Oelebaches in die Aare ergiesst sich in diesen ein von rechts kommendes, kleines Rinnsal, das ziemlich steil über einen Abhang hinunterstürzt und sehr kalkreich ist. Trotz eifrigster Nachforschungen konnte ich in seinem untern Teil nichts finden, erst auf der andern Seite der Strasse, ziemlich weit oben fand sich unter den zwar recht seltenen Steinen stets Pl. alpina. Weiter oben bei einem Hause bildet diese kaum 20 cm breite Wasserader einen kleinen, ganz klaren Teich, der ebenfalls Pl. alpina enthielt; doch dürfte dieselbe hier bald ausgerottet sein, da kurze Zeit vor meinem Besuche daselbst einige Fische eingesetzt worden waren. Pl. alpina lässt sich im ganzen Bächlein verfolgen bis zur Quelle und namentlich hier fand ich sehr grosse Exemplare. Ferner dringt sie in die Nebenarme und Abzweigungen dieses Bächleins ein, die zum Zwecke der Wiesenbewässerung künstlich angelegt worden sind.

Kehren wir nun zum Oelebach zurück, so finden wir bis zur Mühle vor Mühlethal stets Pl. gonocephala; an einer Stelle stiess ich auch auf die beiden andern Arten, die jedoch nur in wenigen, jedenfalls versprengten, Exemplaren vorhanden waren. Vielleicht sind es auch die letzten Ueberreste früherer grösserer Kolonien. Die übrige Bachfauna ist hier ziemlich reich, Pl. gonocephala dagegen im ganzen sehr spärlich vertreten. Ich habe den Eindruck erhalten, als ob sie erst im Begriff wäre, hier festen Fuss zu fassen; möglicherweise hindert aber die hier sehr oft vorgenommene Bachkorrektion eine reichlichere Vermehrung.

Gleich oberhalb der Mühle fand ich die letzten Exemplare dieses stattlichen Strudelwurmes. Der Bach beginnt hier viel Kalk abzulagern, auch werden die Gebüsche, welche die Ufer bis hier nur stellenweise

einfassten, häufiger und dichter und mischen sich schliesslich mit höhern Bäumen zu einem kleinen Wald. Hauptsächlich dieser Grund wird es sein, dass Pl. gonocephala nicht weiter nach oben vorgedrungen ist.

Bei der Mühle wird nun Pol. cornuta häufiger und findet sich im ganzen Bachbett zahlreicher, als Pl. alpina. Weitere Détails unterlasse ich und verweise auf die beiliegende Karte, auf welcher ich mit vieler Sorgfalt die Fundpunkte eintrug. Erwähnen will ich nur, dass die Unterläufe der zahlreichen Nebenbäche und -Bächlein der Hauptsache nach von Pol. cornuta, weiter oben, namentlich in den Quellen ausschliesslich von Pl. alpina bewohnt sind. Die Art der Verbreitung der 3 Turbellarien im Oelebach ist also eine ähnliche, wie sie Voigt für einige Gegenden in Deutschland nachwies.

Werfen wir zum Schluss noch einen Blick auf 2 andere Bäche. Der eine, Salzbach genannt, mündet oberhalb des Oelebaches in die Aare. Trotz eifrigster Nachforschung fand ich von seiner Mündung bis 2 km aufwärts nicht eine einzige Dendrocœle. Diese Thatsache war mir anfänglich vollkommen unerklärlich ; denn die am Ufer recht dicht stehenden Bäume konnten unmöglich die alleinige Ursache des gänzlichen Mangels sein. Wie ich erst später zufällig vernahm, ist aber hier der Bach von sehr vielen Forellen bewohnt ; ich wog solche von 160 gr Gewicht. Ob dem Dorfe Radelfingen beginnen plötzlich die Planariaden wieder aufzutreten und zwar erst Pol. cornuta, bald aber auch Pl. alpina, die auch hier allein die Quellen bewohnt. Pl. gonocephala fehlt hier.

Ein weiterer Bach, den ich untersuchte, ist derjenige, der in der Nähe von Lyss in die Aare mündet (auf der Karte nicht mehr eingetragen). In seinem Unterlauf findet sich Dendrocoelum lacteum. Der Lyssbach ist ziemlich fischreich, aber auch die zahlreichen Fabriken, die an seinen Ufern stehen, scheinen ein Grund zu sein, dass hier die übrigen Tricladen fehlen. Oberhalb Lyss, in der Nähe der Bierbrauerei fand ich noch ein Stück von Pol. cornuta; im Frühling des folgenden Jahres (1899) fand sich an derselben Stelle immer noch diese Art, ich fand ebenfalls ein einziges Exemplar. Weiter oben fehlen die Planarien gänzlich. Ich untersuchte den Lyssbach von seiner Mündung an 7 km weit und sehr genau, ohne ein einziges Individuum, ausgenommen dasjenige bei der Brauerei und Dendrocœlum lacteum, finden zu können. Dem ersten von

links kommenden Nebenbach folgte ich mit dem gleichen negativen Resultat etwa 3 km weit. Ich glaube aber für diesen Mangel in dem letztgenannten Teil sichere Erklärung geben zu können:

1. In seinem Unterlaufe ist er oft sehr reissend und kalkablagernd;
2. sind die Ufer dieses Teiles stark bewaldet;
3. wird er in seinem Oberlaufe oft gereinigt, wie dies die neben dem Bache aufgehäuften Schuttdämme beweisen; und endlich
4. ist jedenfalls der Hauptgrund folgender: Der Bach entspringt aus einem kleinen See, dem sog. Lobsigensee. Derselbe wird von einigen mageren Zuflüssen gespiesen. Im Sommer hat sein Wasser eine ausserordentlich hohe Temperatur und in diesem warmen Wasser leben ja, wie bereits erwähnt, die in Betracht kommenden Arten nicht. Dendrocœlum lacteum dagegen kehrt sich nicht an die hohe Temperatur und bewohnt ziemlich häufig die Steine des Ufers.[1])

In der Strecke, die oft gereinigt wird, fiel mir überhaupt die verhältnismässige Seltenheit eigentlicher Wassertiere auf. Gammarus findet sich wohl, aber nur sporadisch, Wasserschnecken sind geradezu selten, die kleinen, schwarzen Käfer, die im Lyssbach selbst einen wesentlichen Bestandteil der Fauna ausmachen, finden sich nur hie und da; von Anneliden ist keine Spur. Dagegen treten alle die Insektenlarven, deren Imagines ein Landleben führen, in grosser Menge auf.

Dies in Kürze die Ergebnisse meiner Exkursionen; weitere Nachforschungen auf diesem Gebiet können noch manches Neue ergeben.

Es sei mir noch gestattet, Herrn Dr. Th. Steck, der so freundlich war, die Korrektur zu übernehmen, den besten Dank abzustatten.[2])

---

[1]) Sämtliche bis jetzt bekannte Fundorte der einheimischen Turbellarien habe ich in einer demnächst in der Revue Suisse de Zoologie erscheinenden Arbeit zusammengestellt.

[2]) Das Manuskript wurde fertig gestellt im Indischen Ocean, an Bord des «Sachsen» (Nordd. Lloyd), den 29. Dez. 1899.

J. H. Graf.

Die nachfolgende *Abhandlung L. Schläfli's über «Praktische Integration»* ist in Briefform für einen uns unbekannten Freund bestimmt, dem beim Lesen von *J. L. Raabe's* Differenzial- und Integralrechnung gewisse Zweifel aufgestiegen waren. Er ist undatiert: jedoch lassen sich leicht Anhaltspunkte gewinnen, welche uns auf die Zeit der Abfassung schliessen lassen. Der Aufenthalt Schläfli's in Thun dauerte von 1837 bis 1847. Die ganze Abhandlung wurde veranlasst durch Fragen, die Schläfli's Freund beim Lesen des I. Bandes des Raabe'schen Werkes besonders bei S. 21 und 41 aufgestiegen waren. Dieser I. Band Raabe's ist 1839 in Zürich erschienen und wir werden kaum fehl gehen, wenn wir den Brief auf das Jahr 1840 datieren. Wir geben den Brief möglichst getreu wieder, haben uns aber erlaubt, die Nummerierung der Resultate in einer Weise zu verändern, dass das Verständnis des Aufsatzes nur gefördert wird, sowie einige Zusätze und Erläuterungen zu geben. Der Aufsatz scheint uns für die Priorität der Aufstellung der Theorie der Bernoullischen Zahlen und Funktionen von gewisser Bedeutung zu sein und beweist aufs Neue, welch' schöpferischer Geist in Schläfli wohnte.

Praktische Integration.

Von

L. Schläfli.

Wenn $f(x)$ die erste abgeleitete Funktion von der ursprünglichen Funktion $F(x)$ bezeichnet, d. h. wenn für ein unendlich werdendes w

$$\lim_{w=0} \frac{F(x+w) - F(w)}{w} = f(x) \qquad \text{(A.)}$$

ist, so schreibt man auch

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

oder mit Rücksicht nicht bloss auf die algebraische Form, sondern auf den absoluten Wert

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

wo a einen Anfangswert der Variablen x bezeichnet, von dem an man sie bis zu ihrem Endwert b wachsen lässt.

Aufgabe: Die Funktion f(x) ist gegeben; es ist aber kein Verfahren bekannt, durch welches man einen endlichen (geschlossenen) Ausdruck für die Funktion F(x) finden könnte? Man soll daher F(b) — F(a) wenigstens approximativ mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit berechnen.

Auflösung: Man teile b — a in n gleiche Teile — je mehr, desto besser. — Ein solcher Teil heisse w, also $b - a = nw$.

Wenn nun f(x) zwischen den Grenzen a und b kontinuierlich und endlich bleibt, so kann der Fehler, den man begeht, wenn man in der Gleichung (A.) das Zeichen lim weglässt, durch Vermehrung der ganzen Zahl n und daherige Verminderung der Grösse w so klein gemacht werden als man will, nur nicht = 0.

Begnügt man sich nun mit irgend einem Grade von Genauigkeit, und nimmt man w so klein an als es derselbe erfordert, so kann man folgende Gleichungen hinsetzen:

$$\begin{aligned}
F(a+w) - F(a) &= w\,f(a)\\
F(a+2w) - F(a+w) &= w\,f(a+w)\\
F(a+3w) - F(a+2w) &= w\,f(a+2w)\\
F(a+4w) - F(a+3w) &= w\,f(a+3w)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F(a+nw) - F(a+(n-1)w) &= w\,f(a+(n-1)w), \quad \text{addiert}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(a+nw) - F(a) &= w\left\{f(a) + f(a+w) + \cdots + f(a+(n-1)w)\right\}\\
&= F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

Beurteilung des an dieser Gleichung haftenden Fehlers, für den Fall, dass f(x) von x = a bis x = b beständig wächst.

Den n^{ten} Teil von b — a, d. h. w teile man ferner in p gleiche Teile; dann kann man die Gleichung

$$F(a+w) - F(a) = w\,f(a)$$

durch die *viel genauere*

$$F(a+w)-F(a)=\frac{w}{p}\left\{f(a)+f\left(a+\frac{w}{p}\right)+\cdots\cdots+f\left(a+\frac{p-1}{p}w\right)\right\}$$

ersetzen. Es ist der gemachten Annahme zufolge

$$f\left(a+\frac{w}{p}\right)>f(a)$$

$$f\left(a+\frac{2w}{p}\right)>f\left(a+\frac{w}{p}\right)$$

u. s. f., daher auch

$$f(a)+f\left(a+\frac{w}{p}\right)+f\left(a+\frac{2w}{p}\right)+\cdots\cdots+f\left(a+\frac{p-1}{p}w\right)>p\,f(a),$$

also $F(a+w)-F(a)>w\,f(a)$, analog

$$F(a+2w)-F(a+w)>w\,f(a+w)$$

u. s. w., daher schliesslich

$$F(b)-F(a)>w\left\{f(a)+f(a+w)+\cdots+f(a+(n-1)w)\right\},\qquad(1.)$$

aber diese Ungleichheit nähert sich der Gleichheit so sehr als man will, wenn nur w immer kleiner angenommen wird.

Ferner ist

$$f(a)<f(a+w)$$

$$f\left(a+\frac{w}{p}\right)<f(a+w)$$

— — — — — — —

$$f\left(a+\frac{p-1}{p}w\right)<f(a+w),\text{ folglich auch}$$

$$F(a+w)-F(a)<w\,f(a+w)$$

$$F(a+2w)-F(a+w)<w\,f(a+2w)$$

— — — — — — — — — — — —

$$F(a+nw)-F(a+(n-1)w)<w\,f(a+nw),\text{ addiert}$$

$$F(a+nw)-F(a)<w\left\{f(a+w)+f(a+2w)+\cdots\right.$$
$$\left.+f(a+(n-1)w+f(a+nw)\right\}$$

aber $a+nw=b$, daher

$$F(b)-F(a)<w\left\{f(a+w)+f(a+2w)+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+f(a+(n-1)w)+f(b)\right\}\qquad(2.)$$

Aber auch diese Ungleichheit nähert sich der Gleichheit so sehr als man will, wenn man nur n gross genug annimmt.

Die Betrachtung der beiden approximativen Werte von $F(b) - F(a)$, von denen der eine zu klein, der andere zu gross ist, zeigt, dass der Fehler kleiner sein muss als $a\{f(b) - f(a)\}$.

Entwicklung des Fehlers in eine Reihe nach den steigenden Potenzen von w.

Man bezeichne die successiven Differentialquotienten von f(x) durch

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots\ldots\ldots,$$ setze

$$F(b) - F(a) = F;\quad f(b) - f(a) = f$$
$$f_1(b) - f_1(a) = f_1$$
$$f_2(a) - f_2(a) = f_2$$
$$- - - - - -$$

$$S = a\{f(a) + f(a + w) + \cdots + f(a + k\,w) + \cdots + f(a + (n-1)\,w)\}$$

$$S = a\sum_{k=0}^{k=n-1} f(a + k\,w)$$

$$s = a\sum_{k=0}^{k=n-1} f_1(a + k\,w)$$

$$s_1 = a\sum_{k=0}^{k=n-1} f_2(a + k\,w)$$

$$s_2 = a\sum_{k=0}^{k=n-1} f_3(a + k\,w)$$

$$- - - - - - - -$$

Nun hat man ganz genau

$$F(b) - F(a) = \int_a^{a+w} f(x)\,dx + \int_{a+w}^{a+2w} f(x)\,dx + \cdots + \int_{a+(n-1)w}^{a+nw} f(x).\,dx$$

$$= \sum_{k-0}^{k=n-1} \int_{a+kw}^{a+(k+1)w} f(x)\,dx. \qquad (3.)$$

Nach dem *Satze von Taylor* ist aber

$$\int_{a+kw}^{a+(k+1)w} f(x)\,dx = F(a + k\,w + w) - F(a + k\,w)$$

$$= w\,f(a + k\,w) + \frac{w^2}{2!}\,f(a + k\,w) + \frac{w^3}{3!}\,f(a + k\,w) + \cdots\cdots$$

Setzt man dies in die Gleichung (3.) ein, so folgt

$$F = S + \frac{w}{2!}\,s + \frac{w^2}{3!}\,s_1 + \frac{w^3}{4!}\,s_2 + \cdots + \frac{w^{\mu-1}}{\mu!}\,s_{\mu-2} + \cdots\cdots \quad (4.)$$

Weil nun aber die Funktion $f(x)$ sich zu $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ etc.,
» » $f_1(x)$ » » $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ »
» » $f_2(x)$ » » $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$ »
— — — — — — — — —

ganz ebenso verhalten wie sich die Funktion $F(x)$ zu $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... verhält, so hat man folgendes System von unendlich vielen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
F &= S + \frac{w}{2!}\,s + \frac{w^2}{3!}\,s_1 + \cdots\cdots + \frac{w^{\mu-1}}{\mu!}\,s_{\mu-2} + \cdots\cdots \\
f &= s + \frac{w}{2!}\,s_1 + \frac{w^2}{3!}\,s_2 + \cdots\cdots + \frac{w^{\mu-1}}{\mu!}\,s_{\mu-1} + \cdots\cdots \\
f_1 &= s_1 + \frac{w}{2!}\,s_2 + \frac{w_3}{3!}\,s_3 + \cdots\cdots + \frac{w^{\mu-1}}{\mu!}\,s_{\mu} + \cdots\cdots \\
&\text{— — — — — — — — — — — —} \\
f_m &= s_m + \frac{w}{2!}\,s_{m+1} + \frac{w^3}{3!}\,s_{m+2} + \cdots + \frac{w^{\mu-1}}{\mu!}\,s_{m+\mu-1} + \cdots
\end{aligned}\right\} \text{I.}$$

Aus dem System I sollen nun s s_1 s_2 s_3 . . . . . eliminiert, d. h. der Wert von s durch F f f_1 f_2 . . . . . ausgedrückt werden.

Um diese Elimination bequem auszuführen, wollen wir uns vorerst auf 5 Gleichungen beschränken und dieselben folgendermassen darstellen.

$$\begin{aligned}
F &= S + \frac{1}{2}\,w\,s + \frac{1}{6}\,w^2 s_1 + \frac{1}{24}\,w^3 s_2 + \frac{1}{120}\,w^4 s_3 + \cdots\cdots \\
w\,f &= \quad w\,s + \frac{1}{2}\,w^2 s_1 + \frac{1}{6}\,w^3 s_2 + \frac{1}{24}\,w^4 s_3 + \cdots\cdots \\
w^2 f_1 &= \quad w^2 s_1 + \frac{1}{2}\,w^3 s_2 + \frac{1}{6}\,w^4 s_3 + \cdots\cdots \\
w^3 f_2 &= \quad w^3 s_2 + \frac{1}{2}\,w^4 s_3 + \cdots\cdots \\
w^4 f_3 &= \quad w^4 s_3 + \cdots\cdots
\end{aligned}$$

Die letzte dieser 5 Gleichungen ergiebt:

$$w^4 s_3 = w^4 f_3 - \cdots\cdots,$$ also die vorletzte

$$w^3 s_2 = w^3 f_2 - \frac{1}{2} w^4 f_3 + \cdots\cdots,$$ die dritte

$$w^2 s_1 = w^2 f_1 - \frac{1}{2} w^3 f_2 + \frac{1}{12} w^4 f_3 - \cdots\cdots,$$ die zweite

$$w s = w f - \frac{1}{2} w^2 f_1 + \frac{1}{12} w^3 f_2 + 0 \cdot w^4 f_3 - + \cdots\cdots,$$ die erste

$$S = f - \frac{1}{2} w f + \frac{1}{12} w^2 f_1 + 0 \cdot w^3 f_2 - \frac{1}{720} w^4 f_3 + \cdots\cdots$$

Man entnimmt hieraus, dass gesetzt werden darf:

$$S = F + c_1 w f + c_2 w^2 f_1 + c_3 w^3 f_2 + \cdots\cdots + c_\mu w^\mu f_{\mu-1} + \cdots\cdots$$

$$s = f + c_1 w f_1 + c_2 w^2 f_2 + c_3 w^3 f_3 + \cdots\cdots + c_\mu w^\mu f_\mu + \cdots\cdots$$

$$s_1 = f_1 + c_1 w f_2 + c_2 w^2 f_3 + c_3 w^3 f_4 + \cdots\cdots + c_\mu w^\mu f_{\mu+1} + \cdots\cdots$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$s_m = f_m + c_1 w f_{m+1} + c_2 w^2 f_{m+2} + c_3 w^3 f_{m+3} + \cdots\cdots c_\mu w^\mu f_{m+\mu} + \cdots\cdots$$

Man substituiere nun diese Werte von S s s_1 s_2 $\cdots\cdots$ in die erste Gleichung des Systems I, so erhält man für die unbestimmten Coefficienten $c_1 c_2 \cdots\cdots c_\mu \cdots\cdots$ folgendes System von Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{2!} + c_1 = 0 \\
\frac{1}{3!} + \frac{c_1}{2!} + c_2 = 0 \\
\frac{1}{4!} + \frac{c_1}{3!} + \frac{c_2}{2!} + c_3 = 0 \\
\frac{1}{5!} + \frac{c_1}{4!} + \frac{c_2}{3!} + \frac{c_3}{2!} + c_4 = 0 \\
\frac{1}{6!} + \frac{c_1}{5!} + \frac{c_2}{4!} + \frac{c_3}{3!} + \frac{c_4}{2!} + c_5 = 0 \\
\text{— — — — — — — — — — — —} \\
\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{c_k}{(n+1-k)!} = 0
\end{array}\right\} \text{II.}$$

Es ist daher $c_1 = -\frac{1}{2}$

$$c_2 = \frac{1}{12}$$

$$c_3 = 0$$

$$c_4 = -\frac{1}{720}$$

$$c_5 = 0$$

$$c_6 = \frac{1}{30240}$$

$$c_7 = 0$$

$$c_8 = -\frac{1}{1209600}$$

$$c_9 = 0$$

$$c_{10} = \frac{1}{47900160}$$

$$c_{11} = 0$$

$$c_{12} = -\frac{691}{1307674368000}$$

$$c_{13} = 0$$

$$c_{14} = \frac{1}{74724249600} \quad \text{u. s. f.}$$

Die Gleichung, in welcher zuerst die unbestimmten Coefficienten $c_1\ c_2\ c_3 \cdots\cdots$ gebraucht wurden, kann jetzt auch so geschrieben werden

$$F = S - c_1 w f - c_2 w^2 f_1 - c_3 w^3 f_2 - c_4 w^4 f_3$$

oder wenn für die Zeichen $F, f, f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots c_1\ c_2\ c_3 \cdots\cdots$ das durch sie bezeichnete gesetzt und auf $S - c_1 w f$ reduziert wird

$$\int_a^b f(x)\,dx = w\left\{\frac{1}{2}f(a) + f(a+w) + f(a+2w) + \cdots\cdots\cdots + f(a+(n-1)w) + \frac{1}{2}f(b)\right\}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\frac{1}{12}\,w^2\left\{f_1(b)-f_1(a)\right\}+\\
&\frac{1}{720}\,w^4\left\{f_3(b)-f_3(a)\right\}-\\
&\frac{1}{30240}\,w^6\left\{f_5(b)-f_5(a)\right\}+\\
&\frac{1}{1209600}\,w^8\left\{f_7(b)-f_7(a)\right\}-\\
&\frac{1}{47900160}\,w^{10}\left\{f_9(b)-f_9(a)\right\}+\\
&\frac{691}{1307674368000}\,w^{12}\left\{f_{11}(b)-f_{11}(a)\right\}-
\end{aligned}
\right\}\ \text{III.*)}
$$

$$
\frac{1}{74724249600}\,w^{14}\left\{f_{13}(b)-f_{13}(a)\right\}+\ldots\ldots\ \text{in inf.}
$$

Schläfli bemerkt, dass *Raabe* in seinem Buch «die Differenzial- und Integralrechnung» auf S. 431 diese Gleichung (3.) auch habe, sie aber anders abteile und zwar mit dem Vorteil, einen Ausdruck für die Ergänzung zu haben, deren die Reihe in (3.) bedarf, wenn sie irgendwo abgebrochen wird. In der That findet sich im I. Bande, § III von Seite 435 ein «Allgemeines Verfahren die nummerischen Werte bestimmter Integralien näherungsweise zu ermitteln.» Seite 432 giebt er die Coefficienten dem Werte nach wie hier, während er sie Seite 433 bis mit c_{20} auf 16 Decimalstellen ausgerechnet hat, nämlich

$c_2 = 0{,}08333\ \ 33333\ \ 333333$
$c_4 = 0{,}00138\ \ 88888\ \ 888889$
$c_6 = 0{,}00003\ \ 30687\ \ 830688$
$c_8 = 0{,}00000\ \ 08267\ \ 195767$
$c_{10} = 0{,}00000\ \ 00208\ \ 767570$
$c_{12} = 0{,}00000\ \ 00005\ \ 284190$
$c_{14} = 0{,}00000\ \ 00000\ \ 133825$
$c_{16} = 0{,}00000\ \ 00000\ \ 003390$
$c_{18} = 0{,}00000\ \ 00000\ \ 000086$
$c_{20} = 0{,}00000\ \ 00000\ \ 000002$

Nun mögen noch einige Untersuchungen über diese Zahlen c_1 $c_2\,c_3\,.\,c_4\,\ldots\ldots$ folgen. Wir werden durch Vergleichung auf folgende Fragen geführt:

*) Für die Methode, diese Gleichung abzuleiten, vergleiche *S. D. Poisson*, Traité de mécanique, III. Auflage, I, S. 16, Nr. 13.

1. *Sind wirklich mit Ausnahme von c, alle Zahlen c mit ungeradem Index = 0, wie es die berechneten Werte von* $c_3\, c_5\, c_7\, c_9\, c_{11}\, c_{13}$ *vermuten lassen?*

2. *Geht der Zeichenwechsel der Werte der mit geradem Index behafteten c ungestört so weiter, wie er an den berechneten Werten von* c_2 *bis* c_{14} *sich zeigt?*

3. *Wenn man in den Nennern der Zahlen* $c_2\, c_4\, c_6$ *etc. die Faktoren 1! 3! 5! etc. weglässt, welcher Natur ist denn die Progression*

$$\frac{1}{12},\ \frac{1}{120},\ \frac{1}{252},\ \frac{1}{240},\ \frac{1}{132},\ \frac{691}{27760},\ \frac{1}{12},$$

u. s. w.? Nähern sich ihre Glieder vielleicht immer mehr einem bestimmten endlichen Werte? oder können sie vielleicht grösser werden als jede beliebige Zahl?

Man multipliziere die erste der Gleichungen II mit x^2, die zweite mit x^3, die dritte mit x^4, u. s. f., damit bei der Addition der so veränderten Gleichungen in der ersten senkrechten Reihe

$$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots \text{ in inf.} = e^x - 1 - x$$

herauskomme. In der zweiten senkrechten Reihe erhält man $c_1 x (e^x - 1)$; in der dritten $c_2 x^2 (e^x - 1)$ u. s. f., somit im ganzen

$$e^x - 1 - x + c_1 x (e^x - 1) + c_2 x^2 (e^x - 1) + c_3 x^2 (e^x - 1) + \cdots\cdots = 0$$

$$e^x - 1 + c_1 x (e^x - 1) + c_2 x_2 (e^x - 1) + \cdots\cdots = x$$

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots\cdots = \frac{x}{e^x - 1}$$

$$= \frac{x}{2} \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} - 1$$

also, weil $c_1 = -\frac{1}{2}$ ist

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = 1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots\cdots$$

Da aber die linke Seite dieser Gleichung den Wert nicht ändert, wenn x in — x übergeht, so müssen alle mit ungeradem Index behafteten Coefficienten c der rechten Seite verschwinden. Dies die Antwort auf die erste Frage.

Zusätze: Es ist

$$\frac{x}{2}\,\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}} = 1 + c_2x^2 + c_4x^4 + c_6x^6 + \cdots\cdots \qquad (a)$$

Lässt man in dieser Gleichung x in ix übergehen, so folgt:

$$\frac{x}{2}\cot g\,\frac{x}{2} = 1 - c_2x^2 + c_4x^4 - c_6x^6 + - \cdots\cdots \qquad (b)$$

Schwieriger zu beantworten ist die *zweite* Frage.

Um kleinere Brüche zu erhalten, setze ich $c_{2n} = -(-1)^n \frac{B_n}{(2n-1)!}$

Man hat nämlich alsdann $B_1 = \frac{1}{12}$

$$B_2 = \frac{1}{120}$$

$$B_3 = \frac{1}{252}$$

$$B_4 = \frac{1}{240}$$

$$B_5 = \frac{1}{132}$$

$$B_6 = \frac{691}{32760}$$

$$B_7 = \frac{1}{12}$$

Die allgemeine Gleichung bei II muss in zwei Fällen betrachtet werden:

1. n gerade,
2. n ungerade.

1. Setzt man für n die gerade Zahl 2n, so hat man

$$\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2n)!} + \frac{c_2}{(2n-1)!} + \cdots\cdots + \frac{c_{2k}}{(2n+1-2k)!} + \cdots\cdots + \frac{c_{2n}}{1!} = 0.$$

Man multipliziere diese Gleichung mit (2n)!, führe die obige Bezeichnung durch B ein und bediene sich des *Raabe'schen*

$$\binom{2n}{2k-1} = \frac{2n\,(2n-1)\cdot\ldots\cdot\ldots(2n-2k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots(2k-1)},$$

so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \binom{2n}{2k-1} B_k = 0. \qquad (c)$$

Diese Gleichung gilt für alle Werte der ganzen Zahlen von 1 an bis ∞.

2. Setzt man für n die ungerade Zahl $2n+1$ ein, so hat man

$$\frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{c_2}{(2n)!} + \cdots\cdots + \frac{c_{2k}}{(2n+2-2k)!} + \cdots\cdots + \frac{c_{2n}}{2!} = 0.$$

Durch Multiplikation mit $(2n+1)!$ erhält man

$$\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k-1} \cdot B_k = 0. \qquad (d)$$

Diese Gleichung gilt auch für $n = 0$. Das System (c) würde zur Berechnung der Werte von $B_1\, B_2\, B_3 + \cdots\cdots$ genügen, aber die Gleichungen (d) sind sehr vorteilhaft zur Verifikation.

Es wird im Verlauf der Untersuchungen von Nutzen sein, wenn man jetzt schon, veranlasst durch die Form der Gleichungen (c) und (d), folgende Bezeichnung einführt:

$$\varphi(x,n) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n}}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n}{2k-1} x^{2n-2k+1} \qquad (e)$$

$$\psi(x,n+1) = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n+1}{2k-1} x^{2n-2k+2}$$

oder

$$\psi(x,n) = \frac{x^{2n}}{2n} - \frac{x^{2n-1}}{2} - \sum_{k=1}^{k=n-1} (-1)^k B_k \binom{2n-1}{2k-1} x^{2n-2k} \qquad (f)$$

Diese Gleichungen (e) und (f) gelten für $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ und nun lassen sich die Gleichungen (c) und (d) ganz kurz so darstellen:

$$\varphi(1,n) = 0; \quad \psi(1,n) = 0.$$

Überdies hat man noch $\varphi(0,n) = 0$; $\psi(0,n) = 0$.

Überdies hat man noch $\varphi(0,n) = 0$; $\psi(0,n) = 0$. Multiplizieren wir (e) mit dx und integriert man zwischen den Grenzen 0 und x. so folgt

$$\int_0^x \varphi(x,n)\,dx = \int_0^x \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,dx - \int_0^x \frac{x^{2n}}{2}\,dx - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n}{2k-1} \int_0^x x^{2n-2k+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2n+1}\frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2(2n+1)} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n}{2k-1} \frac{x^{2n-2k+2}}{2n-2k+2}$$

$$\int \varphi(x,n)\,dx = \frac{1}{2n+1}\,\psi(x,n+1); \text{ analog} \qquad (g)$$

$$\int \psi(x,n)\,dx = \frac{1}{2n}\,\varphi(x,n) + (-1)^n B_n \cdot x \qquad (h)$$

Die Gleichung (a) lässt sich folgendermassen darstellen:

$$\frac{1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{6!} + \cdots}{\frac{1}{1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{3!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{5!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{7!} + \cdots} = 1 + \frac{B_1}{1!}x^2 - \frac{B_2}{3!}x^4 + \frac{B_3}{5!}x^6 - + \cdots$$

Man multipliziere beide Seiten dieser Gleichung mit dem Nenner linker Hand, so müssen, da ja die Gleichung für jedes x wahr sein soll, die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x einander gleich sein. Dadurch erhalten wir folgendes System von Gleichungen:

$$\frac{(1/2)^2}{3!} + \frac{B_1}{1!\,1!} = \frac{(1/2)^2}{2!}$$

$$\frac{(1/2)^4}{5!} + \frac{(1/2)^2 B_1}{1!\,3!} - \frac{B_2}{3!\,1!} = \frac{(1/2)^4}{4!}$$

$$\frac{(1/2)^6}{7!} + \frac{(1/2)^4 B_1}{5!\,1!} - \frac{(1/2)^2 B_2}{3!\,3!} + \frac{B_3}{5!\,1!} = \frac{(1/2)^6}{6!}, \text{ allgemein}$$

— — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{(1/2)^{2n}}{(2n+1)!} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(1/2)^{2n-2k} B_k \cdot (-1)^k}{(2n-2k+1)!\ (2k-1)!} = \frac{(1/2)^{2n}}{(2n)!}$$

oder wenn wir mit $\frac{1}{2}(2n)!$ multiplizieren, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(1/2)^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n}{2k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2k+1} = \frac{(1/2)^{2n}}{2} \\ &\text{oder auch wegen (e)} \\ &\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right) = 0. \end{aligned}\right\} \text{(j)}$$

Dies ist der erste Satz. Durch Behandlung der Gleichung (a) wurde eben der Beweis und die Aufstellung dieses ersten Satzes beabsichtigt. Nun stellen wir gleich einen *zweiten Satz* auf. Es ist zu zeigen, dass

$$\cos\Theta + \frac{\cos 2\Theta}{2^{2n}} + \frac{\cos 3\Theta}{3^{2n}} + \cdots\cdots + \frac{\cos p\Theta}{p^{2n}} + \cdots\cdots \text{in inf.}$$

$$= \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p\Theta}{p^{2n}} = -\frac{(-1)^n}{2} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n-1)!} \psi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n\right) + \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n-1)!} B_n \quad \text{(k)}$$

Um zu zeigen, dass dieser Satz für $0 < \Theta < 2\pi$ wahr ist, zeige man vorerst, dass wenn er für n gilt, er auch für $n+1$ Giltigkeit hat; hernach soll die Richtigkeit noch für $n = 1$ nachgewiesen werden.

Durch Multiplikation mit $d\Theta = 2\pi\, d\frac{\Theta}{2\pi}$ und Integration von 0 bis Θ findet man unter Beachtung von Gleichung (h)

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\sin p\Theta}{p^{2n+1}} = -\frac{(-1)^n}{2} \frac{(2\pi)^{2n+1}}{(2n)!} \varphi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n\right) \quad \text{(l)}$$

Diese Gleichung liefert für die Setzungen $\Theta = 0$, $\Theta = \pi$, $\Theta = 2\pi$, die schon gefundenen Gleichungen

$$\varphi(0, n) = 0,\ \varphi\left(\frac{1}{2}, n\right) = 0,\ \varphi(1, n) = 0,$$

was für die Richtigkeit der Gleichungen (l) und (k) spricht. Durch nochmalige Multiplikation mit $d\Theta$ und Integration von 0 bis Θ folgt

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1 - \cos p\Theta}{p^{2n+2}} = -\frac{(-1)^n}{2} \frac{(2\pi)^{2n+2}}{(2n+1)!} \psi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n+1\right).$$

daher

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p\,\Theta}{p^{2n+2}} = -\frac{(-1)^{n+1}}{2}\frac{(2\pi)^{2n+2}}{(2n+1)!}\,\psi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n+1\right) + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^{2n+2}} \quad (m)$$

Durch abermalige Multiplikation dieser Gleichung mit $d\Theta$ und nachfolgender Integration erhalten wir

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\sin p\,\Theta}{p^{2n+3}} = -\frac{(-1)^{n+1}}{2}\frac{(2\pi)^{2n+3}}{(2n+2)!}\,\varphi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n+1\right) -$$

$$\frac{(2\pi)^{2n+2}}{2(2n+1)!}\,B_{n+1}\Theta + \Theta \cdot \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^{2n+2}}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $\Theta = \pi$ und bedenkt man, dass $\sin p\pi = 0$ und $\varphi\left(\frac{1}{2}, n+1\right) = 0$ wegen (j), so erhält man

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^{2n+2}} = \frac{(2\pi)^{2n+2}}{2(2n+1)!}\,B_{n+1}.$$

Substituiert man diesen Wert nun in Gleichung (m), so unterscheidet sich dieselbe von Gleichung (k) nur dadurch, dass in ihr $n+1$ statt n steht, somit ist der erste Teil des Beweises geleistet und es ist noch zu zeigen, dass (k) auch für $n=1$ gilt. Es sei

$$y = x\cos\Theta + x^2\cos 2\Theta + x^3\cos 3\Theta + \cdots\cdots + x^m\cos m\Theta + \cdots\cdots,$$

wo x einen ächten positiven oder negativen Bruch bezeichnen mag, damit die Reihe konvergent sei. Multipliziert man diese Reihe mit $2x\cos\Theta$ und beachtet man, dass

$$2x^{m+1}\cos m\Theta\cos\Theta = x^{m+1}\cos(m-1)\Theta + x^{m+1}\cos(m+1)\Theta,$$

so findet man

$$2xy\cos\Theta = x^2(y+1) + y - x\cos\Theta,$$

$$\text{woraus } y = \frac{x\cos\Theta - x^2}{1-2x\cos\Theta+x^2} \text{ folgt, oder auch}$$

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1-x^2}{1-2x\cos\Theta+x^2}.$$

Man multipliziere nun diese Gleichung mit $d\Theta$ und integriere. Rechts führe man die Variable $t = \operatorname{tang}\frac{\Theta}{2}$ und berücksichtige die

Gleichungen $\cos\Theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ und $d\Theta = \frac{2\,dt}{1+t^2}$. Man erhält alsdann wegen

$$\int \frac{(1-x^2)\,dt}{(1-x)^2+(1+x)^2\,t^2} = \text{arc tang}\,\frac{1+x}{1-x}\,t$$

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p \sin p\Theta}{p} = -\frac{\Theta}{2} + \text{arc tang}\,\frac{1+x}{1-x}\,t$$

$$= \text{arc tang}\,\frac{x\sin\Theta}{1-x\cos\Theta}.$$

Man beabsichtigt nun in dieser Gleichung $x = 1$ werden zu lassen. Dann muss aber Θ zwischen den Grenzen 0 und 2π enthalten sein, weil an diesen Grenzen selbst $y = 1+1+1+\ldots\ldots = \infty$ wird, also eine Integration $\int y\,d\Theta$ bis an diese Grenze oder über sie hinaus keinen Sinn haben kann. Man findet also für $0 < \Theta < 2\pi$, die Gleichheit von Θ mit einer dieser Grenzen ausgeschlossen,

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\sin p\Theta}{p} = \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}. \qquad (n)$$

Durch Multiplikation mit $d\Theta$ und Integration von α bis Θ

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p\alpha - \cos p\Theta}{p^2} = \frac{\pi}{2}(\Theta-\alpha) - \frac{1}{4}(\Theta^2-\alpha^2), \text{ also}$$

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p\Theta}{p^2} = \frac{1}{4}\,\Theta^2 - \frac{1}{2}\,\pi\,\Theta + \left\{\sum \frac{\cos p\alpha}{p^2} - \frac{1}{4}\,\alpha^2 + \frac{1}{4}\,\pi\,\alpha\right\}$$

Es ist aber für ein unendlich klein werdendes α

$$\lim_{\alpha=0}\left\{\sum \frac{\cos p\alpha}{p^2} - \frac{1}{4}\,\alpha^2 + \frac{1}{4}\,\pi\,\alpha\right\} = \sum \frac{1}{p^2},$$

$$\text{als } o\sum \frac{\cos p\Theta}{p^2} = \frac{1}{4}\,\Theta^2 - \frac{1}{2}\,\pi\,\Theta + \sum \frac{1}{p^2}. \qquad (\alpha)$$

Man überzeugt sich bald, dass diese Gleichung für $\Theta = 2\pi$ wahr ist. Sie gilt also für ein zwischen 0 und 2π liegendes Θ und für diese Grenzen selbst. Setzt man in derselben $\Theta = \pi$, so kömmt

$$-\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} + \sum \frac{1}{(2m)^2} = -\frac{1}{4}\pi^2 + \sum \frac{1}{(2m-1)^2} +$$

oder auch $\sum \frac{1}{(2m)^2}$

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$ Nun aber ist

$$\sum \frac{1}{(2m)^2} = \frac{1}{4} \sum \frac{1}{m^2};$$ folglich

$$\sum \frac{1}{p^2} = \sum \frac{1}{(2m-1)^2} + \frac{1}{4} \sum \frac{1}{p^2},$$ woraus

$$\sum \frac{1}{p^2} = \frac{4}{3} \sum \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$ und endlich

$$\sum \frac{\cos p\Theta}{p^2} = \frac{1}{4}\Theta^2 - \frac{1}{2}\pi\Theta + \frac{\pi^2}{6}. \qquad (\beta)$$

Wenn aber in Gleichung (k) $n = 1$ gesetzt wird, so kommt

$$\sum \frac{\cos p\Theta}{p^2} = \frac{(2\pi)^2}{2} \psi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, 1\right) + \frac{(2\pi)^2}{2} B_1$$

$$= (2\pi)^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Theta}{2\pi}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\Theta}{2\pi}\right] + 2\pi^2 \cdot \frac{1}{12},$$

was mit Gleichung (β) harmoniert.

Endlich gehen wir zum *dritten Satze* über.

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(n-1)!} B_n \qquad (o)$$

Dieser Satz wird sofort aus (k) erhalten, wenn in (k) $\Theta = 0$ gesetzt wird.

Nun kann auch auf die 2te und 3te Frage geantwortet werden. Da nämlich

$$\sum \frac{1}{p^{2n}} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots\cdots$$

positiv ist, so muss nach Gleichung (o) auch B_n stets positiv sein, woraus bei der angenommenen Relation $c_{2n} = -(-1)^n \frac{B_n}{(2n-1)}$ der stete Zeichenwechsel der Grössen $c_2\, c_4\, c_6\, c_8 + \cdots\cdots$ sich ergiebt. Da ferner $\sum \frac{1}{p^{2n}}$ stets grösser ist als 1, jedoch dieser Zahl mit wachsendem n fortwährend sich nähert, so hat man

$$B_n > \frac{2(2n-1)!}{(2\pi)^{2n}},$$

jedoch, so dass mit wachsendem n diese Ungleichheit sich beständig der Gleichheit nähert. Da nun im Zähler des Ausdrucks rechter Hand die mit wachsendem n neu hinzu kommenden Faktoren stets grösser werden, während diejenigen des Nenners sich gleich bleiben, so schliesst man hieraus sofort, dass B_n jede endliche positive Grösse überschreiten kann. Die Zahlen $B_1\ B_2 \cdots B_n \cdots$ heissen Bernoullische Zahlen. Ihre Werte werden successive berechnet und verificiert mittelst der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \binom{2n}{2k-1} B_k = 0 \\ \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k-1} B_k = 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(p)\\ \text{Von } n=1\\ \text{bis } n=\infty\end{matrix}$$

Es sei auch

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,n) &= \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n}}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n}{2k-1} x^{2n-2k+1} \\ \psi(x,n) &= \frac{x^{2n}}{2n} - \frac{x^{2n-1}}{2} - \sum_{k=1}^{k=n-1} (-1)^k B_k \binom{2n-1}{2k-1} x^{2n-2k} \end{aligned}\right\} (q)$$

Dann kann man mittelst dieser Bezeichnungen folgende Sätze hinstellen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = w\left\{\frac{1}{2} f(a) + f(a+w)\, f(a+2w) + \cdots + f(a+(n-1)w) + \frac{1}{2} f(b)\right\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k B_k \frac{w^{2k}}{(2k-1)!} \left\{ f_{2k-1}(b) - f_{2k-1}(a) \right\}, \qquad (r)$$

wo $b - a = n\,w$ und $f_{2k-1}(x)$ den $(2k-1)^{\text{ten}}$ Differentialcoefficienten von $f(x)$ bezeichnet. Es ist weiter

$$\frac{x}{2} \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = 1 + \frac{B_1}{1!} x^2 - \frac{B_2}{3!} x^4 + \frac{B_3}{5!} x^6 - \frac{B_4}{7!} x^8 + \cdots\cdots \qquad (s)$$

$$\frac{x}{2}\ \text{cotang}\frac{x}{2} = 1 - \frac{B_1}{1!}x^2 - \frac{B_2}{3!}x^4 - \frac{B_3}{5!}x^6 - \frac{B_4}{7!}x^8 + \cdots\cdots \quad (t)$$

ferner

$$\left.\begin{aligned}\varphi(0,n) &= 0, \quad \varphi(1,n) = 0\\ \psi(0,n) &= 0, \quad \psi(1,n) = 0\end{aligned}\right\} \quad (u)$$

und

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right) = 0. \quad (v)$$

$$\sum_{1}^{p=\infty} \frac{\cos p\Theta}{p^{2n}} = + \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n-)!}\left\{B_n - (-1)^n \psi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n\right)\right\} \quad (w)$$

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\sin p\Theta}{p^{2n+1}} = -(-1)^n \frac{(2\pi)^{2n+1}}{2(2n)!}\varphi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n\right) \quad (x)$$

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n-1)!} B_n. \quad (y)$$

Auch lassen sich folgende zwei Sätze, welche bewiesen werden können und in welchen x eine ganze positive Zahl bezeichnet, aufstellen:

$$\left.\begin{aligned}1^{2n} + 2^{2n} + 3^{2n} + 4^{2n} + 5^{2n} + \cdots\cdots + (x-1)^{2n} &= \varphi(x,n)\\ 1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + 4^{2n-1} + \cdots\cdots + (x-1)^{2n-1} &= \psi(x,n)\end{aligned}\right\}. \quad (z)$$

Nun, mein Lieber, musst du mich entschuldigen, dass ich mein Versprechen dir nicht eher erfüllt habe. Aber gleich als ich von unserer letzten Zusammenkunft heim kam, dachte ich zu viel versprochen zu haben; denn ich wusste nicht, was ich über die Gleichungen (9) und (10), S. 41 in *Raabe**) dir schreiben sollte, das ich nicht

---

*) Es handelt sich um die Gleichungen

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = w\left\{\varphi(a) + \varphi(a+w) + \varphi(a+2w) + \cdots\cdots + \varphi(b-w)\right\} \quad (9)$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = w\left\{\varphi(a+w) + \varphi(a+2w) + \varphi(a+3w) + \cdots + \varphi(b-w) + \varphi(b)\right\} \quad (10)$$

Siehe S. 41 in J. L. Raabe, die Differential- und Integralrechnung, I. Bd., Zürich 1839.

damals dir mündlich gesagt hätte. So lange w zwar sehr klein ist, aber doch noch einen endlichen Wert hat, sind jene beiden Gleichungen nur approximativ und zwar ist bei der einen der Fehler in diesem Sinne, bei der andern im entgegengesetzten. Subtrahiert man sie daher von einander, so erhält man freilich auf der linken Seite 0, aber auf der rechten Seite die Summe der Fehler, die man aber doch nicht gleich o setzen darf.

Ich verwundere mich aber, dass du *Raabe's* Beweis für den *Taylor'schen* Satz begriffen hast, denn auf S. 21*) kommen Trugschlüsse vor, ähnlicher Art wie der, durch welchen du bei jenen Gleichungen (9) und (10), S. 41, ad absurdum geführt wurdest. Die Gleichung (18), S. 21, ist wirklich gar nicht wahr, wenn anders daselbst $f_1(x)$, $f_2(x)$ u. s. f. die Differentialcoefficienten von $f(x)$ bezeichnen. Die aus Poisson's Mechanik genommene Gleichung, die ich hier mit (v) bezeichnet habe, schien mir vorzüglich geeignet, dir über den Grad der Genauigkeit der Gleichungen (9) und (10), S. 41, in Raabe Licht zu geben, und da jene Gleichung (v) auf die Bernoullischen Zahlen führt, so war mir die Gelegenheit erwünscht, zugleich mehrere Beziehungen und Eigenschaften dieser Bernoullischen Zahlen dir vorzulegen und zu beweisen. Es waren die Gleichungen (z), auf die ich durch Lesung von *Bourdons***) Algebra gelangte, die mich zuerst mit jenen Zahlen bekannt machten. Seither, es *sind nun bald 10 Jahre,* bemühte ich mich vergeblich über sie nähern Aufschluss zu verlangen, namentlich zur Beantwortung obiger drei Fragen zu gelangen. Sieh nun, das Bedürfnis, das ich hatte, dir nicht nur die Gleichung (v) oben aus Poisson schlechtweg hinzuschreiben, sondern auch die

---

*) Bezieht sich auf den von *J. L. Raabe*, die Differential- und Integralrechnung, I. Bd., S. 21, gegebenen Beweis.

**) *Bourdon*, *Pierre Louis Marie*, geb. 16. August 1779 in Mençon, gest. 15. März 1854 in Paris, 1801 Professor der Mathematik zu St. Cyr, dann am Licée Charlemagne und am Collège Henry IV., zuletzt Inspektor der Universität Paris, schrieb unter anderem «Elements d'algèbre», die bis 1851 11 Auflagen erlebten. Schläfli benutzte die 5te Auflage 1828 und das von ihm gebrauchte Exemplar befindet sich in der Schweiz. Landesbibliothek in Bern. Da er selbst seinen Namen: «L. Schläfli von Burgdorf» eingetragen hat, so ist hieraus zu schliessen, dass er Bourdon während seines Berner Aufenthalts gebraucht hat, also wahrscheinlich von 1829 an. Dies würde nochmals die Annahme bestätigen, dass der vorliegende Brief aus dem Jahr 1840 stammt. Jene Gleichungen (z) beziehen sich auf Bourdon, 5te Aufl. 1828, S. 655.

Eigenschaften der dabei vorkommenden Bernoullischen Zahlen zu beweisen, hat mich jetzt gezwungen, meine eigenen lange gehegten Wünsche zu erfüllen. Es dreht sich vorzüglich alles um die Gleichung (y). Ich kannte zwar schon vorher, ehe ich daran gieng, dir zu schreiben, zwei Beweise derselben, deren einer sich in *Raabe* findet. Aber der, den ich hier gebe, ist elementarer als jene beiden.

Es ist mir auch leid, dass du beide Male als du in Thun warst, mich nicht angetroffen hast. Das erste Mal war ich von Thun abwesend, das andere Mal war ich den ganzen Tag zu Hause gewesen und nur zwischen 5 und 6 Uhr spazieren gegangen. Ich kam zwar vor 6 Uhr zurück, erfuhr aber erst nachher, als es zu spät war, dass du da gewesen seiest.

Dich herzlich grüssend

dein

L. Schläfli.

A. Kaufmann.

Zur Systematik der Cypriden.

Durch eine Reihe von Untersuchungen von V. Vávra, G. W. Müller, G. O. Sars, W. Hartwig, W. Sharpe, C. H. Turner u. a. teils in europäischen, teils in aussereuropäischen Gebieten wurde im Verlaufe des letzten Decenniums die Kenntnis vornehmlich der Süsswassercypriden wesentlich gefördert, indem aus den verschiedensten Gebieten eine grosse Zahl neuer Arten beschrieben und meist auch genau dargestellt wurden. Dabei zeigte sich die Notwendigkeit, eine Anzahl neuer Genera aufzustellen, und je mehr die Zahl der Spezies wuchs, desto mehr stellte sich auch hier das Bedürfnis ein nach einer alle Formen umfassenden Gruppierung.

Diesem Bedürfnisse suchte V. Vávra in der Weise zu entsprechen, dass er für seine Formen aus Zanzibar (20) Untergattungen einführte und diese bei der Bearbeitung ostafrikanischer Arten wiederum zu einzelnen Gruppen vereinigte (21).

In ähnlichem Sinne wird dann auch eine *Cypridopsis*-Gruppe aufgestellt (22).

Wenn nun diese Gruppierung meist aussereuropäischer Formen, gegründet auf genaue anatomische Untersuchungen, unbestreitbar wissenschaftlichen Wert hat, so erscheint sie mir doch bei der immer noch so mangelhaften Kenntnis der einheimischen Arten und bei der noch herrschenden Unklarheit in der Auffassung der Gattungs- und Spezies-Merkmale einstweilen verfrüht, da dadurch eine rasche Orientierung erschwert wird, und wir Gefahr laufen, bei einer neuen Entdeckung, deren voraussichtlich noch viele zu machen sind, für eine einzige stark abweichende Art eine neue Gruppe aufstellen zu müssen.

Was mir aber für den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse schon berechtigt und durchführbar erscheint, ist eine Zusammen-

stellung der Gattungen in Unterfamilien, wobei die erwähnte Teilung in Subgenera und Arten-Gruppen unangetastet bleibt und nach Belieben weitergeführt oder für spätere Zeiten aufgehoben werden kann.

Ich erlaube mir daher, die einheimischen Formen, die mir zur Untersuchung zugänglich waren, sowie die ausländischen Gattungen, soweit dies nach den Beschreibungen und Darstellungen möglich ist, in eine beschränkte Anzahl von Unterfamilien zusammenzustellen, in der Erwartung, dass auch die künftig neu zu bildenden Gattungen diesen einverleibt werden können, ohne weitgehende Modifikationen in den Familienmerkmalen.

Es geschieht dies z. T. im Anschluss an die Trennung in zwei Unterfamilien, welche G. W. Müller (11) für die Meerescypriden vorgenommen hat.

Die Merkmale, welche, nach meiner Ansicht, zu diesem Zwecke geeignet erscheinen, sind fast ausschliesslich in der Anatomie der Gliedmassen und nur zum geringsten Teil in dem Verhalten der Schalen zu suchen. Es sind: die Gliederzahl der zweiten Antenne, die Anwesenheit und Länge der Schwimmborsten an derselben, die Zahl der Dornen am ersten Fortsatz der Maxille, die Beborstung des Endgliedes des Putzfusses und die Gestalt der Furka. Von der Berücksichtigung des Schalenrandes, auf dessen Gestaltung besonders C. Claus (6) und G. W. Müller (11) ein grösseres Gewicht zu legen scheinen, muss einstweilen abgesehen werden, da dessen Wert zu systematischen Zwecken noch nicht allgemein nachgewiesen und in dem Verhalten desselben wohl kaum mehr als ein Art- oder Gattungsmerkmal zu suchen ist.

Familie **Cyprididae.**

1. Unterfamilie: Notodromadinae.

Letztes Glied der zweiten Antenne lang und schmal. Schwimmborsten überragen die Endklauen. Erster Fortsatz der Maxille mit sechs gefiederten Dornen. Putzfuss am letzten Glied mit drei ungleich langen Borsten. Ejaculationsapparat lang und schmal; Chitinstäbe nicht in getrennten Ringen.

Gattungen: *Notodromas* Liljeborg (10), *Cyprois* e. p. Zenker (24).

Die von Orley (13) als *Notodromas Madaraszi* Orley beschriebene Form gehört nicht dieser Gattung an, wie schon in einer ein-

lässlichen Beschreibung dieser Art durch Daday (7) nachgewiesen wurde, der sie dann der Gattung *Cyprois* einverleibt; sie kann aber auch nicht zu dieser Gattung gestellt werden, wie aus dem Vergleich mit *Cyprois marginata* deutlich hervorgeht. Sie nähert sich vielmehr der Gattung *Cypris* durch den Besitz von zwei Dornen an der Maxille, unterscheidet sich aber von ihr durch die Beborstung des letzten Gliedes des Putzfusses und besonders der Furka und ist, mit Rücksicht darauf, einer besondern Gattung zu unterstellen.

2. *Unterfamilie:* **Herpetocypridinae.**

Schwimmborsten der zweiten Antenne verkümmert. Fortsatz der Maxille mit zwei glatten oder gezähnelten Dornen. Zweites Beinpaar am Ende zangenförmig mit einer gekrümmten Klaue. Furka normal, mit zwei Klauen am distalen Ende. Schwimmvermögen fehlt.

Gattungen: *Herpetocypris* Brady and Norman (3), *Ilyodromus* Sars (16), *Prionocypris* Brady and Norman (4), *Microcypris* Kaufmann (9).

3. *Unterfamilie:* **Cypridinae.**

Schwimmborsten der zweiten Antenne erreichen die Spitzen der Endklauen oder ragen darüber hinaus. Fortsatz der Maxille mit zwei, drei oder vier Dornen. Putzfuss mit zangenförmigem Ende und einer Klaue. Furka normal.

Gattungen: *Cypris* O. F. Müller, *Strandesia* Stuhlmann (18), *Centrocypris* Vávra (20), *Acocypris* Vávra (20), *Stenocypris* Sars (15), *Cyprinotus* Brady (5), (*Heterocypris* Claus (6)), *Zonocypris* G. W. Müller (12), *Chlamydotheca* Saussure (17), *Eurycypris* G. W. Müller (12), *Pachycypris* Claus (6), *Cypretta* Vávra (20), die an die *Cypridopsis*-Formen anlehnt, *Cypridella* Vávra (20), *Pionocypris* Brady (4), *Acanthocypris* Claus (6).

Die von Claus (6 p. 52) aufgestellte Gattung *Heterocypris*, welche Vávra (21) als eine besondere Gruppe der Gattung *Cyprinotus* einführt, entbehrt, nach meiner Ansicht, der Existenzberechtigung völlig. Sie soll, nach Claus, diejenigen Arten der Gattung *Cyprinotus* umfassen, welche keine dorsale Protuberanz, wohl aber eine durch eine Tuberkelreihe gebildete Crenulation am Schalenrand besitzen und geschlechtliche Vermehrung aufweisen. Dieses letztere Merkmal aber fällt

als Gattungsmerkmal unbedingt dahin, da wir auch in andern Gattungen ja selbst bei einzelnen Arten, beiderlei Vermehrungsarten antreffen. Die Tuberkelreihe der rechten Schale ist ferner individuellen Schwankungen unterworfen, kann ganz fehlen, wie bei *Cyprin. incongruens*, welche Claus, und nach ihm andere Autoren, dieser Gattung einverleiben zu müssen glaubten, und die Verhältnisse des Cuticularsaumes sind nach Vávra (21 p. 20) auch keine konstanten; Gründe genug, um die Gattung völlig aufzugeben.

Aus den gleichen Thatsachen ergiebt sich aber auch die Frage, ob die Gattung *Cyprinotus* als solche Berechtigung habe. Die dorsale Protuberanz, die für Brady der Grund zur Abtrennung war, fehlt schon bei *Cyprinotus dentato-marginatus* Sars (15, Taf. I, Fig. 1—4), und ähnliche Erscheinungen treten auch bei der *Cypridopsis*-Gruppe auf, wo die Trennung der Gattungen aus diesem Grunde nicht thunlich wäre. Ebenso ist das Vorhandensein einer Tuberkelreihe auf dem Schalenrand ein Gattungsmerkmal von sehr fraglichem Wert, da es eben ein rein äusserliches ist, und was für bedenkliche Folgen eine Berücksichtigung solcher rein äusserlicher Merkmale in der Systematik herbeiführt, haben uns die Diagnosen älterer Autoren zur Genüge gelehrt. Sie dürfen wohl bei allen Ostracoden höchstens zur Gruppierung innerhalb einer Gattung oder zur Aufstellung von Subgenera verwendet werden (siehe Vávra 21, p. 17).

4. Unterfamilie: **Cypridopsinae.**

Furka verkümmert mit geisselförmiger Endborste. Putzfuss mit einer Klaue am Endglied.

Gattungen: *Cypridopsis* Brady (2), *Paracypridopsis* Kaufmann (9), *Cypridopsella* Kaufmann (9) = *Candonella* Vávra (21) (Claus) (6), *Zonocypris* G. W. Müller (12), *Oncocypris* G. W. Müller (12), *Potamocypris* Brady (1870), nimmt eine Sonderstellung ein.

Diese Subfamilie entspricht also der von Vávra aufgestellten *Cypridopsis*-Gruppe nur teilweise, da er zu dieser auch die Gattungen *Cypridella*, *Pionocypris* und *Cypretta* stellt. Da aber bei diesen Formen die Furka vollkommen normal, bei *Cypretta* nur wenig verändert ist, sehe ich nicht ein, warum sie nicht zur *Cypris*-Gruppe gerechnet werden sollten.

Zu der Gattung *Cypridopsis* Brady zähle ich auch die weit verbreitete Art *Cyprid. vidua*, welche Brady und Norman (4) in ihrer neuesten Arbeit zu der Gattung *Pionocypris* bringen, wo sie ihr aber gleich anfangs eine Ausnahmestellung einräumen müssen.

5. *Unterfamilie:* **Cyclocypridinae.**

Schwimmborsten der zweiten Antenne überragen die Endklauen etwa um die Hälfte ihrer Länge. Zweites Beinpaar am letzten Glied mit drei Borsten, von denen die längste als Putzborste wenigstens so lang ist als die drei letzten Glieder zusammen. Furka normal, mit zwei Endklauen.

Gattungen: *Cyclocypris* Brady and Norman (3), *Cypria* Zenker (24), Untergattung *Physocypria* Vávra (21).

6. *Unterfamilie:* **Ilyocypridinae.**

Zweite Antenne in beiden Geschlechtern fünfgliedrig. Taster des Kieferfusses verkümmert, zweigliedrig. Tibia des zweiten Beinpaares mit wenigstens zwei Borsten, letztes Glied mit drei ungleich langen Borsten. Ejaculationsapparat mit vielen nicht in getrennten Ringen stehenden Chitinstäben.

Die bis anhin beschriebenen Formen wurden alle zur Gattung *Ilyocypris* Brady and Norman (3) gestellt, obschon die Schwimmborsten der zweiten Antenne von sehr verschiedener Ausbildung sind. Gestützt darauf dürfte eine Trennung dieser Gattung mit der Zeit ebenso angezeigt erscheinen, wie bei *Cypris*.

7. *Unterfamilie:* **Candoninae.**

Zweite Antenne des Weibchens fünfgliedrig, des Männchens meist (!) sechsgliedrig mit zwei Spürborsten. Schwimmborsten fehlen gänzlich. Taster des Kieferfusses beim Weibchen nicht verkümmert, dreieckig, beim Männchen ungegliedert. Putzfuss mit drei ungleichlangen Borsten am Endglied. Chitinringe des Ejaculationsapparates getrennt.

Gattungen: *Candona* Baird (1), *Typhlocypris* Vejdovsky (23), *Candonopsis* Vávra (19), *Paracandona* Hartwig (8), *Cryptocandona* Kaufmann (9).

Die marinen Cypriden weichen in der Gestaltung und Beborstung der Gliedmassen nicht unwesentlich von den Süsswasserformen ab, doch lässt sich auch hier die

8. Unterfamilie: **Pontocypridinae,**

welche G. W. Müller (11) als *Pontocyprinae* den *Cyprinae* gegenüberstellt, abtrennen. Sie sind nach den Darstellungen von Sars (15), G. W. Müller (11), Brady und Norman (3) dadurch gekennzeichnet, dass die Borsten am Endglied des zweiten Beinpaares in der Richtung des Gliedes verlaufen und die Hodenschläuche einen nach unten offenen Winkel bilden.

Gattungen: *Pontocypris* Sars (Oversigt 1865), *Erythrocypris* G. W. Müller (11), *Pontocypria* G. W. Müller (11), *Argilloecia* Sars (Oversigt 1865).

Die übrigen Meerescypriden, *Macrocypris* Brady und *Aglaia* Brady sind unter sich so verschieden und weichen z. T. von der Familie der *Cyprididae* so erheblich ab, dass ihre Stellung im System einstweilen noch unbestimmt ist, weshalb ich mich auf die Aufstellung dieser acht Unterfamilien beschränkte.

Bern, April 1900.

Litteratur.

1. Baird, W. — The natural history of the British Entomostraca Ray Society. 1850.
2. Brady, G. St. — A monograph of the rec. Brit. Entomostraca. Trans. Linn. Soc. Vol. XXVI. 1868.
3. Brady, G. St., and Norman, A. M. — A monograph of the marine and freshwater Ostracoda .... Trans. R. Dublin Soc. 1889.
4. — — A monograph .... Part. II. Trans. R. Dublin Soc. Vol. V. 1896.
5. Brady, G. St. — Notes on Entom. coll. by A. Haly in Ceylon. Linn. Soc. Journ. Vol. XIX. 1885.
6. Claus, C. — Beiträge zur Kenntnis der Süsswasserostracoden. Arb. zool. Inst. Wien 1892.
7. Daday, E. — Die anatomischen Verhältnisse von Cyprois dispar Termesz. Füs. Bd. XVIII. 1895.
8. Hartwig, W. — Candona euplectella bildet eine selbständige Gattung. Zool. Anz. Bd. XXII. 1900.
9. Kaufmann, A. — Neue Ostracoden aus der Schweiz. Zool. Anz. Bd. XXIII. 1900.
10. Liljeborg, W. — De crustaceis ex ord. tribus. Lund. 1853.
11. Mueller, G. W. — Ostracoden des Golfes von Neapel. Fauna und Flora des Golfes von Neapel. 1894.
12. — — Ostracoden aus Madagaskar und Ost-Afrika. Abhandl. Senckenberg. naturf. Ges. Bd. XXI. 1898.
13. Orley, L. — Über die Entomostraken-Fauna von Budapest. Termesz. Füset. Bd. X. 1886.
14. Sars, G. O. — Nye Bidrag til kundskaben om Middelhavets Invertebratfauna. Arch. f. Math. og. Naturw. Bd. 12. 1887.
15. — — On some freshwater Ostracoda. Vid. Selsk. Forhandl. No. 8. 1889.
16. — — Contribution to the knowledge of the freshwater Entom. of New-Zealand. Vid. Selsk. Skr. Mat. nat. Klasse N. 5. 1894.
17. Saussure, H. — Mémoire sur divers crustacés nouv. des Antilles et du Mexique. Mém. soc. phys. et nat. Genève. 1889.
18. Stuhlmann, F. — Vorläufiger Bericht über eine Reise nach Ost-Afrika. Sitzungsb. k. Akad. der Wiss. Berlin. Bd. XXXII. 1889.
19. Vávra, V. — Monographie der Ostracoden Böhmens. Arch. naturw. Durchforsch. v. Böhmen. Bd. VIII. 1891.
20. — — Süsswasser-Ostracoden Zanzibars. Beiheft d. Hamb. wiss. Anstalten. Bd. XII. 1895.
21. — — Süsswasser-Ostracoden Deutsch-Ost-Afrikas. Ost-Afrika, Berlin. 1897.
22. — — Süsswasser-Ostracoden. Hamb. Magalhaensische Sammelreise. 1898.
23. Veidovsky, F. — Thierische Organismen der Brunnenwässer von Prag. 1882.
24. Zenker, W. — Monographie der Ostracoden. Arch. f. Naturg. Bd. XX. 1854.

Dr. Dutoit.

Über den Vegetationscharakter der Grajischen Alpen.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 29. April 1900.)

Für den Touristen, welcher die Walliser Alpen überschreitet, giebt es nicht wohl einen schrofferen Gegensatz als den zwischen dem Südabhang des Simplon und demjenigen des grossen St. Bernhard. Das Simplonhospiz liegt, mit der Nordseite an einen flachen Rücken angelehnt, mit seiner Südfront ganz frei gegen die Mittagssonne; aber diese Vorahnung Italiens, welche man beim Heruntersteigen in das Thal der Doveria zu geniessen wähnt, dauert blos kurze Zeit; kaum sind wir über das Dorf Simpeln hinaus, so führt uns die Strasse durch die wilden Engpässe von Algaby und Gondo, und erst bei Isella erreichen wir die südalpine Thalstufe mit ihrer üppigen Vegetation.

Das Hospiz auf dem grossen St. Bernhard dagegen liegt noch inmitten der schaurig ernsten Natur, durch welche sich der Aufstieg von der Cantine de Proz den Pas de Marengo hinan auszeichnet. Das Gebäude selbst ist so eingezwängt zwischen dem Mont Mort und der Chenalettaz, dass es auch im höchsten Sommer blos auf wenige Stunden von der Sonne beschienen wird. Kaum hat man aber den kleinen See hinter sich, und folgt der Krümmung des Weges um den sogenannten Plan de Jupiter, einen früheren römischen Opferaltar, so öffnet sich plötzlich ganz frei die Aussicht auf das Thal des Buthier, das ohne Unterbrechung sich fortwährend erweitert, und dessen Vegetation von Stufe zu Stufe reicher und üppiger wird. Das Aostathal, in welches dasjenige des vom Grossen St. Bernhard herunterfliessenden Buthier einmündet, wird nach Süden von den Grajischen Alpen begrenzt, einer Gebirgskette, welche zwar lange nicht soviel von

den Touristen bereist wird, wie die der Walliser Alpen, ihnen jedoch an landschaftlichen Schönheiten wenig nachsteht. Vom Hauptmassiv jener Alpen münden 4 Seitenthäler in das Hauptthal der Dora Baltea: Val Grisanche, Val de Rhêmes, Val Savaranche und Val de Cogne, die 3 ersten ziemlich direkt von Süd nach Nord, das letztgenannte in einem Bogen von Südost nach Nordwest verlaufend. Das Hauptthal selbst wird im Westen vom Mont Blanc geschlossen, der sich hier mindestens eben so schön wie von Chamounix aus präsentiert. Die meisten Gipfel der Grajischen Alpen erreichen eine Höhe von über 3000 Meter, der Grand Paradis sogar 4045 Meter.

Obwohl Val Grisanche, Val de Rhêmes und Val Savaranche schon eine ziemlich reiche Flora darbieten, so werden sie doch hierin an Mannigfaltigkeit weit übertroffen vom Val de Cogne. Wie unsere Walliserthäler, ist dasselbe an seiner Einmündung in das Hauptthal ganz enge, und erst bei 1450 Meter, nach einem Marsch von 4 Stunden, gelangt man zu einer eigentlichen Thalsohle. Einen Beweis von der Fruchtbarkeit des Bodens an der Ausmündung des Thales in das der Dora Baltea liefert eine ausgedehnte Mandelbaumpflanzung, welche den Abhang bis zu einer Höhe von cirka 750 Meter bedeckt. Schon der untere enge Teil des Thales birgt, analog demjenigen der Visp, eine gewisse Zahl interessanter Pflanzen, welche zum Teil sich in ähnlichen Lagen des Wallis wiederfinden, zum Teil dem Cognethal eigentümlich angehören. Zu den ersteren gehören: Echinospermum deflexum Lehm, in der Schweiz bei Bergün, bei St. Niklaus, bei Adelboden und ob Lauterbrunnen gefunden; Anchusa italica L., sonst in Tessin und im Veltlin häufig; Centaurea valesiaca Jord. und Koeleria valesiaca Gaud., beide im Wallis nicht selten. Zu den letzteren sind zu rechnen Nepeta lanceolata Lam., eine sonst dem Süden Frankreichs angehörende Pflanze; Sisymbrium strictissimum L., aus dem Osten bis dorthin reichend; Astragalus alopecuroides L., welches dort sein Vegetationscentrum hat und nach Osten gar nicht, nach Westen bloss bis Embrun (Hautes Alpes) sich ausbreitet. Ein sehr interessantes Factum ist das Hinaufsteigen von Unkräutern; so reichen Phelipaea arenaria Walp. und Lamium amplexicaule L. bis zu 800 Meter, Veronica verna L. sogar bis zu 1600 Meter. Da das Cognethal, wie alle übrigen diesem Gebiete angehörenden, wegen der an die Bergriesen sich anlehnenden Gletscher sehr wasserreich ist, so fehlen ihm auch alle Pflanzen der trockenen Hänge, welche dem Wallis ein so eigentümliches Ge-

präge verleihen. Wenn wir von Cogne, dem letzten Pfarrdorfe des Thales, höher hinauf dem Laufe der sogenannten Grand' Eyvia entlang emporsteigen, so gelangen wir zu einer der schönsten und üppigsten Alpweiden, Alpe Chavanis, welche jedenfalls von wenigen in der Schweiz übertroffen wird. Der dort herrschende Reichtum an Pflanzen setzt sich bis zum obersten Teile des Thales, der Passhöhe des Col de Cogne fort; wir dürfen wohl behaupten, dass weder Zermatt noch das Engadin eine solche Fülle von Alpenpflanzen auf einem so beschränkten Gebiete aufweisen. Die selteneren unter ihnen (die über die ganze Alpenkette ausgebreiteten lasse ich ausser Acht) lassen sich in 3 Gruppen rubrizieren: 1) solche, welche ausschliesslich im Cognethal ihren Standort haben; 2) solche, welche von Osten oder Westen dorthin eingewandert sind; 3) solche, welche dort ihr Vegetationscentrum haben, von dem aus sie nach Westen, nach Osten oder über den Kamm der Walliser Alpen nach Norden ausstrahlen.

Zur ersten Gruppe gehören:

Aethionema Thomasianum Gay; Oxytropis Huteri Rchb. fil.;
Potentilla sanguisorbaefolia Wolf; Hieracium farinulentum Jord;
Hieracium tomentosum — villosum = eriophyllum Schleich.
Hieracium tomentosum — barbatum = pogonites Schleich.

Zur zweiten Gruppe gehören:

Sesleria pedemontana Reuter, aus den Cottischen Alpen eingewandert.
Alsine mucronata L., aus der Dauphiné. „
Anthyllis Dillenii Schult., aus Südostfrankreich. „
Sempervivum Gaudini Christ., aus den Südabhängen der Zermatteralpen „
Astragalus Onobrychis L. und monspessulames L., aus Südostfrankreich „
Armeria plantaginea Willd., aus Südostfrankreich „
Primula pedemontana Thom., aus den Thälern südlich vom Monte Rosa „
Pedicularis cenisia Gaud., aus der Dauphiné „
Asperula flaccida Ten., aus dem östlichen Piemont „
Knautia tiroliensis Grml., aus der Lombardei „
Artemisia chamaemelifolia Vill., aus den Cottischen Alpen „
Hieracium pedemontanum Burnat, aus den Cottischen Alpen „

Zur dritten Gruppe gehören:

Trisetum argenteum R. u. S., ins Wallis und in die Dauphiné ausstrahlend.

Cerastium suffruticosum L., in die Dauphiné	ausstrahlend.
Silene alpina Thom., in die Dauphiné	„
Silene vallesia L., ins Wallis und in die Dauphiné	„
Saponaria lutea L., in die Dauphiné	„
Saxifraga retusa Gouan, in die Thäler südlich von Monte Rosa und in die Dauphiné	„
Astragalus aristatus L'Hérit., in das Wallis und in die Dauphiné	„
Pedicularis caespitosa Sieber, in sämtliche südöstliche Ketten nach Osten und Westen	„
Pedicularis rosea Wulf., in die Dauphiné, und in die Ostalpen bis ins Tirol	„
Pedicularis fasciculata Bellard., in die Dauphiné, in das Tessin und bis ins Tirol	„
Campanula Allionii Vill., in die Dauphiné	„
Achillea Herba Rota L., in die Dauphiné und östlich bis zum Gardasee	„
Artemisia glacialis L., in die Dauphiné, in die Walliseralpen und ins Engadin	„
Artemisia campestris L. var. alpina, in die Dauphiné, und bis nach Zermatt und Zwischbergen	„
Artemisia Allionii Gaud., nach Zermatt, Saas u. Zwischbergen	„
Centaurea axillaris Willd., in die Dauphiné und in die Walliser Alpen	„

Wir ersehen aus dieser Übersicht, dass ein grosser Teil unserer seltenen Pflanzen, die an einigen beschränkten Standorten und daselbst meist sehr sparsam vorkommen, aus den Grajischen Alpen, wo sie in sehr grossen Mengen auftreten, wahrscheinlich über einzelne Walliser Pässe herübergewandert sind. Einige Arten können als vikariierende angesprochen werden: so ersetzt Oxytropis Huteri Rchb. fil. die verwandte O. Gaudini Reuter, Hieracium farinulentum Jord. das H. pictum Schleich.. Saxifraga retusa Gouan die S. oppositifolia L., Centaurea axillaris Willd. die C. montana L., Primula pedemontana Thom. die P. villosa Jacq., Aethionema Thomasianum Gay unser Aeth. saxatile R. Br., Cerastium suffruticosum L. das C. strictum Koch, Trisetum argentum R. und S. das T. distichophyllum Vill., Achillea Herba Rota L. die A. atrata L., Campanula Allionii Vill. die bei uns so häufige C. barbata L.

Haben wir endlich nach einem steilen Aufstiege die Passhöhe des Col de Cogne, 2847 m. erreicht, so öffnet sich zu unseren Füssen, am Ostabhange der Hauptkette der Grajischen Alpen, zwischen dem Monte Rosa dei Banchi und der Punta Tersiva, ein neues, von Westen nach Osten verlaufendes Thal, das Val di Camporciero, von der Ayasse durchflossen, welche beim historisch denkwürdigen Fort Bard in die Dora Baltea sich ergiesst. Dasselbe zeichnet sich vor den zwischen Courmayeur und Aosta in das Hauptthal einmündenden, anfangs erwähnten 4 Seitenthälern dadurch aus, dass es in seiner oberen Hälfte ausserordentlich steil abfällt (auf eine Länge von 10 km um 1400 m), und auf dieser Strecke gar keine Sohle besitzt. Erst in der untern Hälfte (Senkung 1000 m auf 10 km) haben wir eine flache Thalsohle, welche von Stufe zu Stufe breiter wird, und bei der Einmündung in das Hauptthal sehr breit ausläuft. In floristischer Beziehung zeichnet sich dieses Thal durch seine ausserordentliche Armut aus; ganz zu oberst, an der Schneegrenze, treffen wir auf dem nämlichen Fleck Erde zwei Pflänzchen, die wohl nirgends sonst auf dem ganzen Erdboden zusammen vorkommen, nämlich Phyteuma pauciflorum L., bei uns bloss um Zermatt und im Ober-Engadin, und Petrocallis pyrenaica R. Br., bei uns auf den höchsten Kalkalpen vorkommend. Auf welchem Wege diese zwei Einsiedler dorthin gelangt sein mögen, ist schwer zu sagen, da sie beide in den Alpen von Cogne sonst nirgends zu finden sind. Erst von einer Höhe von 1400 m an bis hinunter zur Einmündung in das Hauptthal finden wir einige interessante Spezies wieder, die uns aus dem Wallis bekannt sind, z. B. Bromus tectorum L., Ononis Natrix L. und Campanula spicata L. Aeusserst merkwürdig ist der Unterschied in der Bewaldung der beiden Thäler. Sowie wir den Kamm der Walliser Alpen überschritten haben, vermissen wir zwei Bäume, welche bei uns die schönste Zierde unserer Berge bilden, und auf welche wir mit vollem Rechte so stolz sind: den Bergahorn und die Arve. Auf dem Südabhange des Grossen St. Bernhard begegnet uns zuerst die Lärche, von 1800 m bis 1000 m prachtvolle Bestände bildend, dann die Erle und die Buche, untermischt mit Obstbaumanlagen, und von 800 m an herrscht bis nach Aosta hinunter die Rebe vor. Beim Einbiegen in das Val de Cogne, nachdem wir über die erwähnte Mandelbaumpflanzung hinaus sind, treffen wir ein buntes Gemisch von halbverwilderten Obstbäumen (Pfirsich-, Pflaumen-, Apfel-, Birn- und Kirsch-

bäume) mit Erlen, Buchen und auffallend hochstämmigen Hippophaë-Sträuchern. Bei 1400 m gewinnt allmählich die Lärche wieder die Oberhand, und steigt, stellenweise wunderschöne Bestände bildend, bis gegen 1800 m hinan. Im Thal von Champorcher dagegen treffen wir bei 1800 m wohl wieder einige Lärchen, aber von 1600 m an wird die Föhre vorherrschend, und von 1400 m an tritt ein Baum auf, der aus allen Felsspalten herauswächst und durch die Mächtigkeit seiner Bestände dem Wanderer einen herrlichen Schutz gegen die tropische Hitze gewährt, die zahme Kastanie. Während voller 3 Stunden wandeln wir unter dem Schatten ihrer Kronen, umschwirrt von zahllosen Cicaden, bis wir das aus terrassenförmig übereinander liegenden Wällen bestehende Fort Bard erreichen. Es ist eigentlich jammerschade, die Strecke von diesem Fort das Thal der Dora Baltea aufwärts bis nach Châtillon per Bahn zurückzulegen; auf ihrer ganzen Länge von circa 30 km besteht sie aus lauter Engpässen, ähnlich unserm Dazio grande. Im Mai, wenn alle Känge in frischem Grün prangen und die Sonne noch nicht brennt, gäbe sie Gelegenheit zu einer mühelosen und prachtvoll romantischen Fusswanderung.

Das Val Tournanche, welches bei Châtillon sich öffnet und zum Theodul hinaufführt, bietet wie das Val di Camporciero bis zur Höhe von 1400 m prachtvolle Kastanienwälder, auf welche bis zu 1600 m Obstbaumanlagen, namentlich schöne Kirschbäume folgen. Auch hier, wie in den Grajischen Alpen, beherrscht die Lärche die oberste Stufe. Dieses an seltenen Pflanzen ziemlich arme Thal birgt 2 interessante Spezies: Alyssum alpestre L., dessen Vegetationscentrum auf beiden Seiten des Massivs der Zermatter-Alpen liegt, und das durch seine grossen gelben Blüten schon von weitem kenntliche Sempervivum Gaudini Christ., welches den Kamm der Walliser Alpen nirgends überschreitet und deshalb innert unserer Grenzen bloss im Zwischbergenthale vorkommt. In der Nähe der Schneegrenze treffen wir dann Saxifrag biflora All., Hieracium piliferum Hoppe, Campanula cenisia L., Epilobium nutans Tausch., nebst den den höchsten Kämmen der Alpen sonst noch eigentümlich angehörenden Zwergpflänzchen.

Das Thal von Zermatt, welches seit der Eröffnung der Bahn von einer von Jahr zu Jahr lawinenartig wachsenden Menge von Touristen besucht wird, sieht seinen Reichtum an seltenen Pflanzen rasch schwinden und dürfte seinen Ruhm, die reichste botanische Fundstätte Europas zu bieten, in kurzer Zeit einbüssen; ich möchte

wünschen, dass das Cognethal, welches jenem an Reichtum wenig nachsteht, noch Jahrzehnte lang sein jetziges Incognito bewahren könnte, damit die dort wachsende Fülle an botanischen Seltenheiten sich recht lange forterhielte.

Inhalts-Verzeichnis.

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
Jahresbericht	III	
Jahresrechnung pro 1898	XIV	
Mitgliederverzeichnis	IX	
Asher L., Dr., Privatdozent, Über die Quelle der Muskelkraft	V	
Baltzer A., Prof. Dr., Geologische Mitteilungen	VI	
Vorweisung zweier Reliefs mit bos primigenius	VI	
Über neuere Eruptionen des Aetna	VIII	
Vorweisung von geologischen Photographien	VIII	
Beiträge zur Kenntnis schweizerischer diluvialer Gletschergebiete (mit einem Lichtdrucke)		54
Benteli A., Rektor und Docent, Die Niveauschwankungen der 13 grössern Schweizerseen im Zeitraum der 31 Jahre, 1867 bis und mit 1897, mit besonderer Berücksichtigung der Jura-Seen vor und nach der Jura-Gewässer-Korrektion (mit 2 Tafeln)	VII	33
Dutoit, Dr. med., Über den Vegetationscharakter der Grajischen Alpen		110
v. Fellenberg E., Dr. phil., Über den sogenannten fossilen Baumstamm	V	
Fischer E., Prof. Dr., Über Prothallien von Lycopodium	VI	
Über fossile Cycadeen	VI	
Göldi E., Dr. phil., Über die Fischfauna des Amazonenstromes	V	
Über Schmetterlingszüge im Amazonengebiete	VI	
Über die Fischfauna des Amazonengebietes	VII	
Graf J. H., Prof. Dr., Präktische Integration von L. Schläfli		83
Gruner P., Dr., Privatdocent, Über Beugungserscheinungen	V	
Huber R., Dr. phil., Gymnasiallehrer, Das Wesen der Telegraphie ohne Draht	VII	
Kaufmann R., Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Demonstration von Tænia	VII	
Zur Systematik der Cypriden		103
v. Kostanecki St., Prof. Dr., Vorweisung von galizischem Erdwachs	VI	

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
Kronecker H., Prof. Dr., Messung von Flüssigkeits-Druckschwankungen	VIII	
Moser Ch., Dr. und Docent, Über eine mit der Umlaufszeit der Planeten zusammenhängende Funktion		1
Schaffer F., Dr. phil., Kantonschemiker und Docent, Über Butteruntersuchungen	VI	
Schücking, Dr., aus Pyrmont, Über die belebende Wirkung des Natrium-Saccharates auf das Herz	V	
Sidler Georg, Prof. Dr., Über eine algebraische Reihe		13
Studer Th., Prof. Dr., Über ein neues Beuteltier	VI	
Über Säugethierreste aus dem Wadi Natron in Unter-Aegypten	VI	
Vorweisung eines rekonstruierten Pfahlbau-Frauenkopfes	VI	
Vorweisung eines Abgusses von Archäopterix	V	
Vorweisung eines Schädels	VIII	
Tschirch A., Prof. Dr., Vorweisung eines „idealen Bildes einer Kohlenlandschaft“	VIII	
Über natürliche Auswahl von Arzneimitteln ähnlicher Wirkungskreise	VIII	3
Volz Walther, Die Verbreitung einiger Turbellarien in den Bächen der Umgebung von Aarberg (mit einer Karte)		66

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

(Fortsetzung von Seite 2 des Umschlags.)

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 5: Reptilien und Amphibien. Zusammengestellt von Dr. H. Fischer. 39 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 6: Mollusken. Zusammengestellt von Prof. Dr. Th. Studer, Dr. G. Amstein und Dr. A. Brot. Preis 60 Cts.

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 9: Crustacea. Von Dr. J. Heuscher etc. 35 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel V4: *Heraldik und Genealogie.* Bearbeitet von Jean Grellet und Maurice Tripet. Bern 1895. 68 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50.

Fascikel V6 a–c: *Architektur, Plastik, Malerei.* Zusammengestellt von Dr. B. Haendcke. Bern 1892. 100 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V6 e: *Leibesübungen.* Turnen, Fechten, Reiten, Wassersport etc. Zusammengestellt von Alois Landtwing. 165 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel V9ab: *Landwirthschaft.* Zusammengestellt v. Prof. F. Anderegg u. Dr. E. Anderegg. Bern 1893. Heft 1—3. 258 S. 8° à Fr. 3.—
id. „ 4 „ —.60
id. „ 5 und 6 „ 2.—

Fascikel V9c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Forstwesen. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1894, 160 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V9c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Jagd. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. 77 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

Fascikel V9c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Fischerei. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1898, 65 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

Fascikel V9d: *Schutzbauten.* Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1895. 136 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V9gβ: *Mass und Gewicht.* Bearbeitet von F. Ris, Direktor der eidgen. Eichstätte. Bern 1894. 36 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel V9gγ: *Post- und Telegraphenwesen.*
Postwesen. Zusammengestellt von der Schweizer. Oberpost-Direktion.
Telegraphenwesen. Zusammengestellt von E. Abrezol, Inspektor der Central-Telegraphenverwaltung. Bern 1895. 113 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V9gε: *Bankwesen, Handelsstatistik, Versicherungswesen.* Zusammengestellt von W. Speiser, Basel, Dr. Geering und Dr. J. J. Kummer. Bern 1893. 207 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel V9j: *Alkohol und Alkoholismus.* Zusammengestellt von Otto Lauterburg, Pfarrer in Neuenegg, E. W. Milliet. Direktor der eidgen. Alkoholverwaltung, und Antony Rochat, Pfarrer in Satigny. Bern 1895. 183 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V10eγ: *Die christkatholische Litteratur der Schweiz.* Zusammengestellt v. Dr. F. Lauchert. Bern 1893. 32 Seiten 8°. 60 Cts.

Fascikel V10eα; *Bibliographie der evangelisch-reformirten Kirche in der Schweiz.* Heft 1: Die deutschen Kantone. Zusammengestellt von Dr. G. Finsler. Preis Fr. 2.—

Fascikel V10e: *Die katholisch-theologische und kirchliche Litteratur des Bisthums Basel* vom Jahre 1750 bis zum Jahre 1893. Zusammengestellt von Pfr. Ludwig R. Schmidlin in Biberist.
Heft 1 und 2 à Fr. 3.—

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

Graf, J. H., Prof., Dr. *Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Euler'schen Integrale.* Fr. 2. —

— — *Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in bernischen Landen* vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. Heft 1—3. Fr. 7. 20

— — *Leben und Wirken des Physikers und Geodäten Jacques Barthélmy Micheli du Crest* aus Genf, Staatsgefangener des alten Bern 1746—1766. Mit Porträt Micheli's, einer Ansicht seines Gefängnisses in Aarburg und Facsimile seines Panorama der Alpen . . Fr. 3. —

— — *Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Joh. Jac. Huber* aus Basel, 1733—1798. Mit dem Bildnisse Huber's und einer Tafel, seine freie Uhrhemmung darstellend . . . . . Fr. 1. —

— — *Professor Dr. Rudolf Wolf, 1816—1893* » 1. —

— — *Professor Ludwig Schläfli, 1814—1895* . » 1. 20

— — *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli* . . . . . Fr. 3. —

— — *Die Exhumirung Jakob Steiner's* und Einweihung des Grabdenkmals Ludwig Schläfli's anlässlich des 100. Geburtstages Steiner's. Mit 2 Lichtdrucken Fr. 1. —

— — *Der Mathematiker Jakob Steiner von Utzenstorf.* Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen . . . . . Fr. 1. 50

Graf J. H., Prof. Dr. und **Gubler Ed., Dr.** *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen.* 2 Hefte: Die Bessel'schen Funktionen erster und zweiter Art . . . . . à Fr. 4. —

Huber, G., Prof. Dr. *Sternschnuppen. Feuerkugeln. Meteorite und Meteorschwärme* . . . . . Fr. 1. —

— — *Forschungen auf dem Gebiete der Spektralanalyse* —. 80

— — *Die kleinen Planeten des Asteroidenringes* . . —. 60

Kissling, Dr., E. *Die versteinerten Tier- und Pflanzenreste in der Umgebung von Bern.* Exkursionsbüchlein für Studierende . . . . . Fr. 4. —

Baumberger, E. *Ueber die geologischen Verhältnisse am linken Ufer des Bielersees* . . . . . Fr. 2. —

Baltzer, A., Prof. *Vom Rande der Wüste.* Populärer Vortrag, gehalten im November 1894 in der Bern. Naturforsch. Gesellschaft. Mit drei Lichtdrucktafeln. . Fr. 1. 50

Fischer, Prof., L., *Zweiter Nachtrag z. Verzeichniss der Gefässpflanzen des Berner-Oberlandes, mit Berücksichtigung der Standortsverhältnisse, der horizontalen und vertikalen Verbreitung* . . . . . Fr. —. 25

Durch jede Buchhandlung zu beziehen.

3 2044 106 306 327